ABC 予想について—谷戸光昭

はじめに

2012 年 9 月後半から 10 月にかけて、ABC 予想についての解説ノートを Facebook で公開しました。この文書はそれをそのまま PDF 化したものです。

理数系から遠く離れた友人たちに向けて書いたものなので、数学を専門とする方には物足りないと思います。ただ、こういった話に興味を持つ学生さんにはちょうどいいかもしれません。

東北大学教授・山崎隆雄さんの論説「フェルマー予想と ABC 予想」には大変お世話になりました。この場を借りて御礼申し上げます。

フェルマー予想の解決までの道のりについては主にウィキペディアを見ました。その他、ネット上の情報を多数活用しております。もし本稿の内容に間違いがある場合は、指摘してくだされば幸いに存じます。

なお、現在では ABC 予想の優れたコラムがたくさん発表されています。例えば、日経サイエンス 1 月号の古田彩さんの記事は大変素晴らしいと思いました。

2012 年 11 月 29 日 谷戸光昭

ABC 予想（序）
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 9 月 29 日 17:58

10 日くらい前だったと思いますが、

「数学の難問、ABC 予想が京大教授によって解明か」

という記事がウェブや新聞に出ました。

すぐさま望月新一氏の経歴が掲載され、その天才ぶりが話題になりました。
（米・プリンストン大学を 19 歳で卒業、23 歳で博士号、32 歳で京大教授等々）

この発表後、ABC 予想を解説する個人ブログなどが増えたのですが、
数学を学んだ者のひとりとして、僕もこの話に触れてみたくなりました。

というわけで、何か書きます。

えーと、1 回では無理なので、何回かに分けます。
しかも、気分が乗ったとき、かつ時間があるとき限定で書きます。
数学を知らない人にも分かるように書くつもりですが、どうなることやら。

実は、数学の話題を書き残すのはちょっと怖いです。
いい加減なこと書けないですし。しかも、今回は敷居が高い・・・。
もし間違ったことを書いた場合は、後で訂正する可能性もあります。

ABC 予想（1）—望月新一先生・その 1
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 9 月 29 日 18:01

ABC 予想は「整数論」という分野の予想ですが、内容は後回しにして、まずは望月先生について書きたいと思います。

報道では望月先生は「京大教授」となっておりますが、正確には「京都大学数理解析研究所」の教授です。

大学教授というと、自分の研究＋学部生教育というイメージがあると思います。
例えば京大理学部教授なら、研究＋理学部教育といった具合に。

しかし、京大数理研は、数学・数理科学専門の研究機関です。

望月先生の個人ウェブを見ると、大学院生（将来研究者を目指す人たち）の研究指導は担っているみたいですが、学部教育については何も触れられていません。
おそらく学部教育は担当していないと思われます。
（内部事情にそこまで詳しくはないので、間違っていたらごめんなさい。）

今回、望月先生は、4 編から成る総計 512 ページもの論文を完成させ、発表しました。
何年も前から継続的に研究に取り組んだ末の結晶です。
先生の実力はその経歴だけを見ても分かりますが、十分な研究時間がこの大仕事の土台になっていることは間違いないでしょう。

それではまた。もう少し先生の話を書きます。

ABC 予想（2）—望月新一先生・その 2
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 9 月 29 日 18:02

突然ですが、僕は 2004 年 2 月に望月新一先生の講演を聴いたことがあります。

東京大学での「Arithmetic Geometry（数論幾何）」という題の研究集会でした。五日間に渡るプログラムの中のひとつの講演で、60 分くらいの話だったでしょうか。

・・・恥ずかしながら、内容の詳細は正直まったく分かりませんでした。

しかしながら、ABC 予想をモチベーション（動機づけ）として、なにやら壮大な幾何学の理論を作っているな、ということだけは分かりました。

整数論の予想なのに「なぜ幾何学？」とお思いの方もいるかもしれませんが、現代では整数論の問題を解くのに幾何を用いるのは割と普通のことです。

こう考えればいいと思います。

整数論の範疇だけで解けるような問題は、既にほとんど解けてしまっている。残った難問を解くためには他の分野の力を借りないといけない、とそんな感じです。後で説明するフェルマー予想の解決にも幾何学が使われています。

さて、今回の件を機に先生のウェブを訪れてみると、講演記録のページに、なんと先生自筆の当時の講演ノート（のスキャン）があるではないですか！（誰でも入手できます）

出だしは「Motivation: ABC Conjecture」から始まっています。そして、最後は次のように締められています。

「... to verify ABC, remains to compute its derivative (work in progress)!」

拙訳
「・・・ABC 予想を証明するためには、その微分の計算が残されている！（研究中だよ）」

つまり、「その微分」とやらが計算できれば、ABC 予想が解けるということです。

今は 2012 年です。この 8 年の間にその計算ができたということですね。やったね！

ちなみに、微分といっても高校でやるような計算とは別物と考えてください。

それではまた。次はフェルマー予想の話かな？（本題が遠くてすみません）

ABC 予想（3）—フェルマー予想
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 9 月 29 日 22:23

この連続ノートでは、ABC 予想の内容だけでなく、最終的に次のことを説明したいと思っています：

もし ABC 予想が正しければ、あのフェルマー予想の別証明が与えられたことになる。

そこで今回は、整数論における超難問の先輩格フェルマー予想についてです。
どうしても数式が出てきますが、とりあえず必要なのは、加減乗除および累乗 (2 乗、3 乗、4 乗・・・）です。
記号「x^n」は「x の n 乗」のつもりです。

まず、次の等式を考えます。

x^2 + y^2 = z^2　・・・(★）
（x の 2 乗と y の 2 乗を加えると z の 2 乗に等しい）

この式は直角三角形におけるピタゴラスの定理で現れる式です。
この式が成り立つような数 x, y, z を書こうとすると、普通はルート（根号） を使うことになります。
しかし、ルートを使わないで済む場合もあります。例えば、

3^2 + 4^2 = 5^2　　(9 + 16 = 25)
5^2 + (12)^2 = (13)^2　　(25 + 144 = 169)

などです。実は、こういった組み合わせは無数にあります。

さて、ちょっとした好奇心で、上の（★）を 3 乗や 4 乗に変えてみましょう。
すると、実際にやってみればわかりますが、途端に自然数の組み合わせが見つからなくなります。

そこでフランスの数学者フェルマーは次のように予想しました。17 世紀のことです。

n が 3 以上の自然数のとき、x^n + y^n = z^n を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

フェルマーはこれを、古代ギリシアのディオファントスという人が著した『算術』の余白に記していました。そして、

私はこの命題の真に驚くべき証明を発見したが、それを書くには余白が狭すぎる

という迷言（？）を遺し、逝ってしまわれたのです・・・。

 フェルマーさんのこの予想は、360 年後、1995 年にワイルズさんによって正しいことが証明されました。
今では、フェルマー・ワイルズの定理です。

ABC 予想の威力をあとで実感するためには、この超難問がどのように解決されたかを見ておく必要があります。
それは次回ということで。（全部で何回かかるんだろう・・・）

ABC 予想（4） — フェルマー予想の解決
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 9 月 30 日 22:35

フェルマー予想

n が 3 以上の自然数のとき、x^n + y^n = z^n を満たす自然数 x, y, z は存在しない

はどのように解決されたのでしょうか。

その歴史をざっくりと見ていきたいと思います。
結構長くなるので、「３．まとめ」まで飛ばしてもいいかも。

ちなみに、フェルマー予想を証明するには背理法を使うしかありません。
等式を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して、論理的矛盾を導くわけですね。

１．個別研究

実は、フェルマー自身が 4 乗のとき（ n = 4 のとき）の証明を書き残しています。
彼は「無限降下法」という手法を編み出して証明しました（1640 年)。

フェルマーは

私はこの命題の真に驚くべき証明を発見した

と書き残しました。
きっと、無限降下法が 4 乗以外のときも使えると思ったのでしょう。
しかし、それは誤りであることが判りました。
今日では、フェルマーの勘違いと考えられています。

いずれにせよ、何人もの数学者が、フェルマーが余白に書けなかった証明を蘇らせようと挑戦しました。

n = 3 のときはオイラーが証明しました（1770 年発表、不備があり後に修正)。

n = 5 のときは、女性数学者ソフィ・ジェルマンの部分的解決を経て、ルジャンドルとディレクレが独立に証明しました（1825 年と 1828 年)。

ここまでで、既にフェルマーから約 190 年が経過しました。

２．包括的な研究

自然数は無限にありますから、「n がいくつのとき」という個別研究を繰り返していても、キリがありません。
そこで、何か包括的な研究が必要になります。

最初に大きな成果をあげたのはクンマーです。
彼は理想数という概念を導入し、かなりたくさんの n について証明しました（1840～50 年頃？）。

せっかくなので、その結果の一部を紹介します。

自然数 n が 100 以下の素数で割り切れる場合は、フェルマー予想は正しい。

なお、素数とは、1 と自分自身以外に約数を持たない自然数のことです（2,3,5,7,11,...）。

例えば、n = 1111 は 11×101 ですから、100 以下の素数 11 で割り切れます。
よって、予想は正しく、x^1111 + y^1111 = z^1111 を満たす自然数 x, y, z はありません。

大変立派な成果をあげたクンマーも、完全解決には至りませんでした。
3 以上のすべての自然数 n について証明されない限りはダメなのです。

時代が進み、20 世紀中盤以降に大きな進展がありました。

戦後の復興期に日光で行われた研究集会で、 志村五郎・谷山豊がある予想を提示しました（1955 年）。（注 1）

フライ、セール、リベらにより、志村・谷山予想が部分的に正しければ、フェルマー予想も正しくなることが分かりました（1986 年）。

これを知ったワイルズは、志村・谷山予想を解こうと、7 年もの間、誰にも相談せずに一人で研究に没頭し、ついにケンブリッジ大学でのシンポジウムで志村・谷山予想の部分的解決を発表しました（1993 年）。最初の論文には証明にミスがありましたが、それを修正して

正しい証明を得ました（1995 年)。

（注 1： 志村・谷山予想は、楕円曲線論および保型形式論という分野の予想です。一見しただけでは、フェルマー予想と関係があるとは思えないものです。）

３．まとめ

フェルマー予想の証明の歴史を短くまとめると、こんな感じです。

「まず個別研究の時代があり（約 190 年間)、その後、包括的な研究の時代へと移った。そうなってからワイルズさんが解決するまでは 170 年かかった。」

個別の 190 年よりも包括的の 170 年の方が短いですが、これは志村・谷山以降が速かったからです。

さて、次回からいよいよ ABC 予想の本題に入ります。そして、もし ABC 予想（のあるバージョン）が正しければ、フェルマー予想を証明するのに後半 170 年分が不要になるということを説明したいと思います。
（不要といっても、その間に作られた近代的理論がすべて要らなくなるという意味ではありません。）

それではまた。

ABC 予想（5）－ABC 予想・その 1
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 10 月 1 日 2:41

望月先生の話とフェルマー予想の話が長くなりすみませんでした。
今回から、ABC 予想の話に入りたいと思います。
必要な知識は、最大公約数と素因数分解です。あと不等式も出てきます。

今、A, B, C を 3 つの自然数とします。ただし、次の条件を満たすものとします。

(1) A + B = C
(2) A と B は互いに素

互いに素というのは最大公約数が 1 ということです。
また、(1) と (2) より、自動的に A, B, C の最大公約数も 1 になります。

常識的に考えて、A と B は小さい順に並べたほうが見やすいので、

(3) A < B （すなわち、A < B < C）

も入れておくことにします。

例えば、3 + 4 = 7 や 5 + 27 = 32 は (1)～(3) を満たします。

一方、8 + 12 = 20 や 6 + 9 = 15 は (2) を満たさないのでダメです。

ABC 予想にはいくつかのバリエーションがあります。

ABC 予想・その 1
(1)～(3)を満たすすべての自然数 A, B, C に対して、C < rad(ABC) が成り立つ。

rad( ) という記号が出てきました。
rad(N) とは、自然数 N を素因数分解し、現れた素因数を全部掛け合わせたものを表します。

例えば、60 を素因数分解すると 2^2 * 3 * 5 （2 の 2 乗と、3 と、5 の積）です。
現れた素因数は 2 と 3 と 5 です。

よって、rad(60) = 2 * 3 * 5 = 30 となります。

素因数分解し、2 乗、3 乗、4 乗などを全部 1 乗にして掛けてしまえ、と言い換えることもできます。
一般に、rad(N) は N と等しいか、あるいは N よりも小さくなります。

他の例です。

rad(6) = 6　　　(6 = 2 * 3)
rad(72) = 6　　(72 = 8 * 9 = 2^3 * 3^2)
rad(101) = 101　　(101 は素数)
rad(1024) = 2　　(1024 = 2^10)

さて、ABC 予想・その 1 を検証します。
例えば、3 + 4 = 7 を考えましょう。
C = 7 です。
一方、ABC = 3 * 4 * 7 = 3 * 2^2 * 7 ですから、rad(ABC) = 3 * 2 * 7 = 42 です。
7 < 42 なので、確かに C < rad(ABC) が成り立っています。

もうひとつ、5 + 27 = 32 を考えましょう。
C = 32 です。
一方、ABC = 5 * 27 * 32 = 5 * 3^3 * 2^5 ですから、rad(ABC) = 5 * 3 * 2 = 30 です。
32 > 30 なので、確かに C < rad(ABC) が成り立って・・・いません！ あれれ？

次回に続く。

ABC 予想（6）―ABC 予想・その 2 および 最終形
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 10 月 1 日 15:51

自然数 A, B, C が

(1) A + B = C
(2) A と B は互いに素
(3) A < B

を満たすならば、C < rad(ABC) が成り立つ、というのが ABC 予想・その 1 でした。
ところが、5 + 27 = 32 という反例（予想が成り立たないような例）が見つかってしまいました。
したがって、予想・その 1 は正しくありません。
実は、1 + 8 = 9 や 1 + 80 = 81 など、無数の反例があることが知られています。

そこで、予想を修正したいと思います。次のように考えましょう。

まず、A, B, C は (1)～(3) を満たす自然数ですから、C < ABC が成り立つのは自明です。
この不等式の右辺をどれだけ小さくできるかと考え、ABC よりも小さい rad(ABC) にしてみたら、反例が見つかってしまいました（予想・その 1)。

C < ABC　　　・・・常に正しい。
C < rad(ABC)　　・・・・反例あり。つまり常に正しいわけではない。

右辺が rad(ABC) だと小さくすぎるというわけです。
それならば、2 乗にしてみたらどうでしょう？

ABC 予想・その 2
(1)～(3) を満たすすべての自然数 A, B, C に対して、C < [rad(ABC)]^2 が成り立つ。

検証します。5 + 27 = 32 を考えましょう。
C = 32 です。
一方、ABC = 5 * 27 * 32 = 5 * 3^3 * 2^5 ですから、rad(ABC) = 5 * 3 * 2 = 30 です。2 乗すると、900 です。
32 < 900 なので、今度は確かに C < [rad(ABC)]^2 が成り立ちます。

予想・その 2 は未解決です。
証明もされていないし、反例も見つかっていません。
もしこれが正しければ、フェルマー予想の別証明が得られます。
次回、それを説明します。

さて、上の不等式 $32 < 900$ を見ると、なんだ、ずいぶん余裕があるじゃないか、と思われるかもしれません。
ならば、2 乗ではなく、1.5 乗ではどうか、1.6 乗ではどうか・・・など、整数乗以外のものについても考えられます。
様々なケースについて、反例が見つかっていたり見つかっていなかったりします。
しかし、どんな場合でも反例はせいぜい有限個で、ほとんどの組み合わせで成り立つよ、というのが最終的な予想です。

ABC 予想・最終形（1985 年提示）
実数 $K > 1$ に対して、(1)〜(3) を満たす自然数 A, B, C で $C < [\ \mathrm{rad}(ABC)\ ]^K$ が成り立たない組み合わせは、高々有限個である。

最終形において $K = 2$ とし、「高々有限個」を「実は 0 個」としたのが予想・その 2 です。
仮に最終形が正しくても、予想・その 2 が正しいとは限りません。（反例が 1 個以上あるかもしれません。）

この最終形も未解決なのですが、おそらく望月先生はこれを証明したと思われます。
論文への理解が不十分なため、現時点で断言はできませんが。
（予想・その 2 は未解決のままかも？）

ABC 予想（7）―フェルマー予想の別証明
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 10 月 4 日 0:37

自然数 A, B, C が

(1) $A + B = C$
(2) A と B は互いに素
(3) $A < B$

を満たすならば、$C < [\mathrm{rad}(ABC)]^2$ が常に成り立つ、というのが ABC 予想・その 2 でした。

予想・その 2 が正しいと仮定して、フェルマー予想の別証明を与えたいと思います。

n を 3 以上の自然数とし、$x^n + y^n = z^n$ となる自然数 x, y, z が存在するとします。

もし x, y, z の最大公約数が G ならば、両辺を G^n で割ることができます。
よって、最初から x, y, z は互いに素としておきます。
さらに、x と y の大小関係は $x < y$ としておきます（すなわち、$x < y < z$ ）。

ここで、x^n, y^n, z^n をそれぞれ A, B, C とおけば、(1)～(3) が成り立っています。
（補注： x と y が互いに素なら x^n と y^n も互いに素になります。また、$x < y$ なら $x^n < y^n$ です。）
よって、ABC 予想・その 2 が使える状況です。

そこで、ABC 予想を使いつつ、次のように不等式の変形をします：

z^n
$< [\mathrm{rad}(x^n * y^n * z^n)]^2$ （予想・その 2： $C < [\mathrm{rad}(ABC)]^2$ より）
$= [\mathrm{rad}(x * y * z)]^2$ （ rad は n 乗を 1 乗に置き換えても等しい）
$\leqq [x * y * z]^2$ （一般に、$\mathrm{rad}(N) \leqq N$ より）
$< [z * z * z]^2$ （ $x < y < z$ より）
$= [z^3]^2$
$= z^6$

不等式 $z^n < z^6$ を得ました。

z は自然数ですから、これは $n < 6$ を意味します。

したがって、次のことがわかりました。

フェルマー予想の反例となる x, y, z が仮に存在するなら、n の可能性は 5 以下である。

言い換えると、n が 6 以上のときはフェルマー予想は正しいということです！

$n = 3, 4, 5$ のときは、個別研究の約 190 年の間にフェルマー、オイラーなどによって証明されています。

よって、すべての場合にフェルマー予想が正しいことが判りました。

わずか 10 行足らずの不等式変形で、「無限にある自然数のうち $n = 3, 4, 5$ のときだけ考えれば十分だよ」となりました。
このように、ABC 予想は無限を有限に縮められる力を持っており、同様の応用例が他にもあります。

一方で、超難問のフェルマー予想がこんなに簡単に解けてしまうということは、それだけ ABC 予想・その 2 の解決が難しいということでもあります・・・。

いずれにせよ、本ノートを通じて、少しでも ABC 予想の持つ力がみなさんに伝われば嬉しく思います。

さて、目的は達成しましたが、もうちょっとだけ続くんじゃ。たぶん。

ABC 予想（8・終）—補足とか後書きとか、そんなの。
作成: 谷戸 光昭 日時: 2012 年 10 月 5 日 1:50

ABC 予想（序）にて

数学を知らない人にも分かるように書くつもり

と書いたのですが、最後の方は数式ばかりになってしまいました。

数式をあまり使わずにやろうかとも思いましたが、それらを略して雰囲気だけ伝えても、結局何もわからずに終わってしまうのではないか、という心配が頭をよぎり、最終的にはキチンと書くことにしました。

ただ単に、数式を使わないでまとめる力量が僕にはないというだけかもしれません。

すべての日本人は少なくとも中学までは数学の傍にいる（いた）はずです（笑）
現在数学から遠い所にいる方は、論理展開と数式を難しく感じたと思いますが、
そういった方にも是非 ABC 予想を体験して欲しいと思います。
せっかく日本の数学者が証明した（かもしれない）のですから。

別に難しくはありません。
紙と鉛筆を用意し、$A + B = C$ となる A, B, C を適当に選び、不等式

$C < rad(ABC)$ や $C < [\, rad(ABC)\,]^2$

が成り立っているかを検証するだけです。

rad( ) の定義はこのシリーズの（5）を見てください。
新出の記号を理解するための必要条件は、自分で具体例を作ってみることでありましょう。
そして、rad( ) の意味を知ることと ABC 予想を知ることはほぼ同値です。

万物は原子からできています。
例えば、水は水素原子 H ふたつと酸素原子 O ひとつからできています。（H_2O）

一方、すべての整数は素数からできています。

例えば、45 は素数 3 ふたつと素数 5 ひとつからできています。
（ 45 = 3 * 3 * 5 ← 素因数分解 ）

物理・化学で原子が重要なのと同様、整数論では素数が重要です。

物理・化学における原子（の研究） ＝ 整数論における素数（の研究）

ABC 予想の不等式は、積 ABC の素因数を使って C を抑えるという式なんですね。

「この大地は球の形をしている」という命題は、説としてはかなり大昔からあるようですが、飛行機やロケットのない時代にこれをキチンと証明しようとするととても大変ではないでしょうか。
しかし、現代では、衛星写真などでこの命題が自明になっています。

ABC 予想（その 2 や最終形）は、状況証拠的にかなり正しそうなのですが、これを直接的にキチンと証明しようとするととても大変です。
望月先生は、ABC 予想のまわりに「宇宙」を作り、そこに「ロケット」を飛ばして ABC 予想を外から眺めようとしたと思われます。ABC 予想が自明になるような宇宙やロケット発射技術を構築した。それが先生の仕事と思われます。

僕は先生の論文をまったく理解できていないので、今の例えはただの推察に過ぎませんが、当たらずと雖も遠からずかと思います。

そもそも、理論の名前が

宇宙際タイヒミュラー理論 Inter-universal Teichmueller Theory

ですからねぇ。
先生の論文を見ると、主定理を応用すると 3 つの予想が正しくなる（そのうちのひとつが ABC）と書いてあります。ABC だけを直接的に解いたのではなく、他の予想も解決するような壮大な理論を作ったということです。本当にすごい。

さて、最後まで長々とお付き合いくださり、誠にありがとうございました。
それでは、これにて失礼いたします。