1　2 重積分

2 重積分の定義.

区分求積法による定義. (授業で説明する)

定理 1.

関数 $f(x,y)$ が閉領域 D 上連続ならば $f(x,y)$ は D 上 2 重積分可能である.

定理 2.

閉領域 D 上 2 重積分可能な関数 $f=f(x,y)$, $g=g(x,y)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) [線形性] λ,μ が定数のとき,

$$\iint_D (\lambda f+\mu g)\,dx\,dy=\lambda\iint_D f\,dx\,dy+\mu\iint_D g\,dx\,dy.$$

(2) [加法性] D がふたつの閉領域 D_1,D_2 に分割されるとき,

$$\iint_D f\,dx\,dy=\iint_{D_1} f\,dx\,dy+\iint_{D_2} f\,dx\,dy.$$

(3) [単調性] D 上で常に $f\le g$ のとき,

$$\iint_D f\,dx\,dy\le\iint_D g\,dx\,dy.$$

(4) $|f|$ も D 上 2 重積分可能で,

$$\left|\iint_D f\,dx\,dy\right|\le\iint_D |f|\,dx\,dy.$$

定理 3 (累次積分, repeated integral).

(1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$ とする. ただし, a,b は定数, $\varphi(x),\psi(x)$ は連続関数. このとき, 関数 $f(x,y)$ が閉領域 D 上連続ならば, f の D 上の 2 重積分は以下の右辺のように計算される:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right\}dx.$$

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,c\le y\le d,\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$ とする. ただし, c,d は定数, $\alpha(y),\beta(y)$ は連続関数. このとき, 関数 $f(x,y)$ が閉領域 D 上連続ならば, f の D 上の 2 重積分は以下の右辺のように計算される:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left\{\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right\}dy.$$

補注 3-1. (1) の閉領域 D を**縦線領域**, (2) の D を**横線領域**と呼称することがある.

補注 3-2. (1) および (2) の右辺の積分をそれぞれ次のように表すこともある.

$$\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,\qquad \int_c^d dy\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

演習問題

1-1. 積分領域 D を図示し, 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+xy+y^2)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,-2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

(4) $I = \displaystyle\iint_D e^x \sin(2y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

1-2. 積分領域 D を図示し, 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D x^3 y\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (1-x-y)^2\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,x+y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1-3. xyz 空間における次の領域の体積を求めよ.
曲面 $z = 9x^2+4y^2$ の下で頂点 $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,3,0)$, $(0,3,0)$ の長方形の上の領域.

2　2重積分における変数変換

定理 1 (1 変数関数の定積分における変数変換 (置換積分の公式)).
t の閉区間 $[\alpha, \beta]$ が $x = g(t)$ によって, x の区間 I の中に写され

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b \quad (a, b \in I) \tag{1}$$

とすると, I で定義された関数 $f(x)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt. \tag{2}$$

定理 2 (2 重積分における変数変換).
D を xy 平面上の有界閉領域, D' を uv 平面の有界閉領域とする. $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ により D' から D への変換 $\Phi = (\varphi, \psi)$ が与えられており, この対応は 1 対 1 で, φ, ψ は u, v に関して連続な偏導関数をもち (= φ, ψ は C^1 級), ヤコビアン

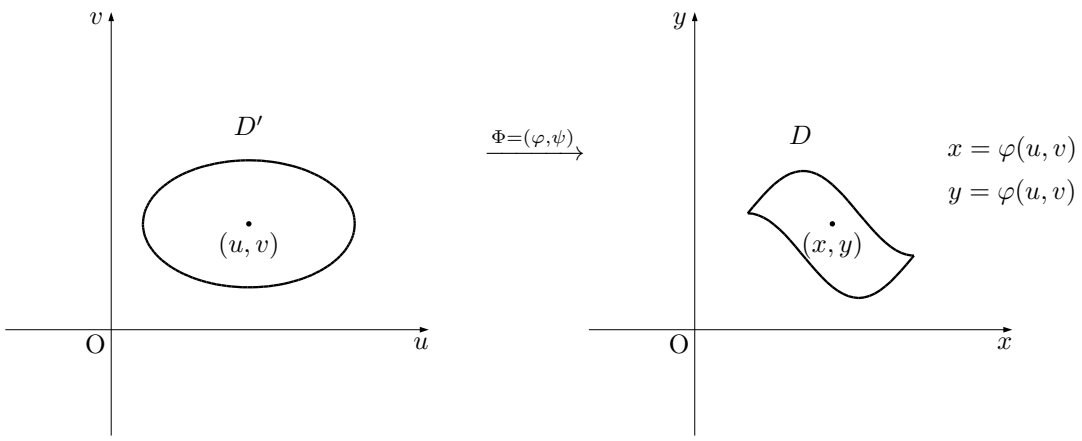
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u \tag{3}$$

が D' 上で 0 にならないとする.

さらに関数 $f(x, y)$ が D 上で連続ならば, 次の公式が成り立つ:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \tag{4}$$

(図)



補注 1-1. D' と D の対応が 1 対 1 でなくても, またヤコビアンが 0 となる点があっても, そのような点の集合の面積が 0 であるならば, (4) は成り立つ. (例えば, 極座標変換を用いる場面でしばしば起こり得る.)

補注 1-2. ヤコビアンの絶対値を取るのは, 1 変数の場合と異なり, 重積分では積分に方向を考えていないからである. (領域に方向を考える場合もある → ベクトル解析の面積分)

演習問題

2-1. 次の 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \cos(x^2)\, dx$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$

2-2. 次の積分の順序を変更せよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{1} dx \int_x^{2x} f(x,y)\, dy$

2-3. 変数変換を用いて, 2 重積分 I を計算せよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)e^{x-y}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x-y \le 1,\ 0 \le x+y \le 1\}$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(x-y)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x+y \le \pi,\ 0 \le x-y \le \pi\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}, \qquad$ hint: $u = x+y,\ v = \frac{y}{x}$

2-4. 変数変換を用いて, 2 重積分 I を計算せよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le a^2\}\ (a > 0)$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^3\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le x\}$

(4) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}\ (a > 0,\ b > 0)$

2-5. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ とする. また, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0,\ y \ge 0\}$ とおき, 任意の自然数 n に対して $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ と定める.

(1) $D_n \subset D$ であること, および $D_n \subset D_{n+1}$ であることを, 図を描いて確認せよ.

(2) $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\, dx\, dy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

補注. これは無限領域 D に対する**広義 2 重積分** $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ の計算法の一例である ((3) の値がこの積分の値となる). $\{D_n\}$ は無限領域 D の**近似増加列**と呼ばれる.

3　3 重積分

3 重積分の定義. (2 重積分の区分求積法と同様)
V: 空間内の閉領域,　$f = f(x, y, z)$: V 上定義された 3 変数関数.

$$I_\Delta = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})(a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})(c_k - c_{k-1}) \tag{5}$$

$$\longrightarrow I = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

定理 1. 関数 $f(x, y, z)$ が V 上連続ならば $f(x, y, z)$ は V 上 3 重積分可能である.

定理 2. (1)〜(4) (線形性, 加法性, 単調性等は 2 重積分のときと同様に成り立つ.)

定理 3 (累次積分).
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$, ただし, D は xy 平面上の閉領域.
このとき, 関数 $f(x, y, z)$ が V 上連続ならば

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right\} dx\, dy. \tag{7}$$

補注. 右辺の積分を次のように表すこともある.

$$\iint_D dx\, dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \tag{8}$$

演習問題

3-1. 次の 3 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iiint_V e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$

(2) $I = \displaystyle\iiint_V x^2\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$

(3) $I = \displaystyle\iiint_V xyz\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

(4) $I = \displaystyle\iiint_V y\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, x + 2y + 3z \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

4　3重積分における変数変換／重積分の応用

定理 1 (3 重積分における変数変換).
V: xyz 空間内の閉領域, V': uvw 空間内の閉領域.
$x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \xi(u,v,w)$ により, $\Phi : V' \to V; (u,v,w) \mapsto (x,y,z)$. (1 対 1 の変換)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \quad (\text{ヤコビアンは } V' \text{ 上で} \neq 0 \text{ とする}) \tag{9}$$

このとき,

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\xi(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw. \tag{10}$$

2. 空間の変数変換の例

2-1. 空間の極座標 (球座標).
(r,θ,φ)・・・r は原点からの距離, θ は天頂角, φ は方位角. 空間の点 (x,y,z) との変換式は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{11}$$

となる. この変換に関するヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ となる.

2-2. 円柱座標.
(r,θ,z)・・・r, θ は平面上の極座標変換と同じ. 空間の点 (x,y,z) との変換式は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z \tag{12}$$

となる. この変換に関するヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$ となる.

3. 面積・体積

3-1. 平面上の閉領域の面積.
xy 平面上の閉領域 D の面積 $|D|$ は以下の 2 重積分で与えられる:

$$|D| = \iint_D dx\,dy \tag{13}$$

3-2. 空間内の閉領域の体積.
xyz 空間内の閉領域 V の体積 $|V|$ は以下の 3 重積分で与えられる:

$$|V| = \iiint_V dx\,dy\,dz \tag{14}$$

演習問題

4-1. 空間の極座標について

(1) $(r, \theta, \varphi) = (3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ に対応する点 (x, y, z) を求めよ.

(2) $(x, y, z) = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2})$ に対応する点 (r, θ, φ) を求めよ. ただし, $0 \leq r,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$ とする.

4-2. 円柱座標について

(1) $(r, \theta, z) = (2, \frac{2}{3}\pi, -1)$ に対応する点 (x, y, z) を求めよ.

(2) $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, -2, 5)$ に対応する点 (r, θ, z) を求めよ. ただし, $0 \leq r,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(3) 円柱座標による変数変換でヤコビアンが $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$ となることを確かめよ.

4-3. 空間の極座標を用いて, 次の 3 重積分を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ (a は正の定数)

(2) $I = \displaystyle\iiint_V x e^{-x^2 - y^2 - z^2}\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

4-4. 半径が a の球の体積を求めよ. (3 重積分を使え)

4-5. 次の 2 つの図形の共通部分 V の体積を求めよ. (3 重積分を使え)

(1) 半径 a の球: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ と円柱: $x^2 + y^2 \leq ax$

(2) 円柱: $x^2 + y^2 \leq a^2$ と円柱: $y^2 + z^2 \leq a^2$