

5 線形代数学からの準備

5.1 ベクトルの内積

定義 5.1 (n 次元ベクトルの演算). n を 1 以上の整数とする. 実数を成分とする n 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = {}^t [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = {}^t [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \quad (1)$$

に対して, 次のように各演算を定義する: 加法 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$, スカラー倍 $k\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$ (ただし, $k \in \mathbb{R}$),

内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

定義 5.2 (長さの定義). 上記の \mathbf{a} に対して, ベクトル \mathbf{a} の長さを次のように定める.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \quad (2)$$

命題 5.3 (内積の性質). 内積は次をみたす.

- (i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$ (等号成立は $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときに限る)
- (ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (交換法則)
- (iii) $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$ (ただし, $k \in \mathbb{R}$)
- (iv) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (分配法則)

証明. 内積の定義に従って計算すれば示せるので, 読者の練習とする. \square

命題 5.4. 内積とベクトルの長さについて, 次の不等式が成り立つ.

- (i) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ (コーシー・シュワルツの不等式)
- (ii) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ (三角不等式)

証明. (i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 命題 5.3 より

$$0 \leq \|t\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t^2 \|\mathbf{a}\|^2 + 2t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2 \quad (3)$$

が成り立つ. よって, 上の t の 2 次式は判別式が 0 または負となるから

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \leq 0 \quad (4)$$

となり, $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ を得る.

- (ii) 両辺とも非負なので, 2 乗して比較すれば十分.

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 - \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 - (\|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2) \\ &= 2(\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \geq 0. \end{aligned} \quad (5) \quad (6)$$

ここで, 最後の不等号は (i) による. よって, $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2$ となり, 目的の不等式を得る. \square

Remark. (i) は, \mathbf{a}, \mathbf{b} を式 (1) のように成分表示すれば, 以下と同値:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2). \quad (7)$$

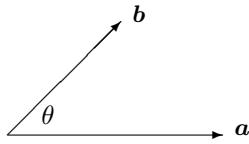
(ii) は, 長さの基本的な性質「三角形の 1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さい」に相当する不等式である.

練習 5.5. 命題 5.4 の (i) において, 等号成立は「 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 」または「 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 」または「 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ \mathbf{b} が \mathbf{a} の実数倍」のときに限ることを示せ. また (ii) において, 等号成立は「 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 」または「 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 」または「 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ \mathbf{b} が \mathbf{a} の正の実数倍」のときに限ることを示せ.

定義 5.6 (角の定義). $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なる任意の n 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad (8)$$

を満たす実数 θ (ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$) を \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角という.



Remark. 与えられた \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し, そのような θ はただひとつに定まる. 実際, シュワルツの不等式より

$$-\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \quad (9)$$

$$\therefore -1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \leq 1 \quad (\leftarrow \text{余弦関数の値域に含まれる}) \quad (10)$$

Remark. 2 次元 (または 3 次元) ベクトルの場合は, $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ と $a_1 b_1 + a_2 b_2$ (または $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$) が等しいことは, 余弦定理を用いることで幾何的に証明される.

定義 5.7 (ベクトルの直交). $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なる n 次元ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} が $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ を満たすとき, \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交するといふ.

例 5.8. 4 次元ベクトル $\mathbf{a} = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = {}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ について,

$$\|\mathbf{a}\| = 2, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{22}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (11)$$

である. 内積が 0 なので, \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交する.

練習 5.9. 3 次元ベクトル $\mathbf{a} = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = {}^t \begin{bmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ のなす角 θ を求めよ (ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$).

命題 5.10. ふたつのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の作る平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} \quad (12)$$

で与えられる. 特に, 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の場合は

$$S = |\det [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}]| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \quad (13)$$

となる (2 次行列式の絶対値).

証明. \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とする. \mathbf{a} を底辺とみると, 高さは $\|\mathbf{b}\| \sin \theta$ であるから

$$S = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \quad (14)$$

と表せる. よって,

$$S^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (15)$$

$$= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2}\right) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (16)$$

となる. 後半 (2 次元ベクトルの場合) は根号の中を計算すれば証明できるので, 読者の練習とする. \square

練習 5.11. 命題 5.10 の後半を証明せよ.

命題 5.12. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とする. \mathbf{a} から \mathbf{b} へ正の向き (反時計回りの向き) にはかった角を φ とする.

このとき, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ならば $\det [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] \geq 0$ である. 一方, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ ならば $\det [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] \leq 0$ である.

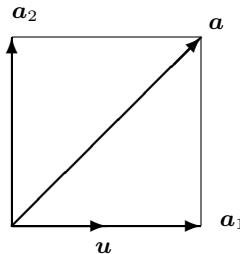
証明. \mathbf{a} と \mathbf{b} の位置関係だけが関係するので, 必要なら座標軸を回転させることにより, \mathbf{a} が x 軸上で正の方向にあるとして良い. そこで $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($a_1 > 0$) とする. このとき, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ならば $b_2 \geq 0$ となるので

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 \geq 0. \text{ 一方, } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \text{ ならば } b_2 \leq 0 \text{ となるので } \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 \leq 0. \quad \square$$

練習 5.13. \mathbf{u} を 2 次元または 3 次元のベクトルとする ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$). 与えられた任意のベクトル \mathbf{a} を, \mathbf{u} と向きが同じまたは逆のベクトル \mathbf{a}_1 と, \mathbf{u} と垂直なベクトル \mathbf{a}_2 の和に分解することを考える. すなわち, 実数 c を用いて

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_1 = c\mathbf{u}, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (17)$$

\mathbf{a}_1 を \mathbf{a} の \mathbf{u} 方向への正射影とよぶ. このとき, $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$ (すなわち, $c = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$) となることを示せ.



練習 5.14. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ の $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向への正射影を求めよ. また \mathbf{u} と垂直な方向の成分 (上の \mathbf{a}_2) を求めよ. さらに, \mathbf{a} を $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ に取り替えて同じ質問に答えよ.

例 5.15. 質点が一定の力 \mathbf{F} を受けながら一直線上を s だけ変位したとする. このとき, \mathbf{F} と s の内積

$$W = \mathbf{F} \cdot s \quad (18)$$

を力 \mathbf{F} のした仕事という. 仕事は, 動いた方向の力の成分 $\|\mathbf{F}\| \cos \theta$ (θ は \mathbf{F} と s のなす角) と変位ベクトルの大きさ $\|s\|$ の積である. 仕事の単位はジュール [J] である. 1[J] は, 1[N] の力で 1[m] 変位したときの仕事である.

5.2 空間ベクトルの外積

この節では xyz 空間内のベクトルを考える。座標系は右手系とする。

定義 5.16 (3 次元ベクトルの外積)。実数を成分とする 3 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = {}^t [a_1 \ a_2 \ a_3], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = {}^t [b_1 \ b_2 \ b_3] \quad (19)$$

に対して、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を次のように定義する:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} |a_2 & b_2| \\ |a_3 & b_3| \\ |a_3 & b_3| \\ |a_1 & b_1| \\ |a_1 & b_1| \\ |a_1 & b_1| \\ |a_2 & b_2| \end{bmatrix} = {}^t \begin{bmatrix} |a_2 & b_2| & |a_3 & b_3| & |a_1 & b_1| \\ |a_3 & b_3| & |a_1 & b_1| & |a_2 & b_2| \end{bmatrix} \quad (20)$$

練習 5.17. 基本ベクトル $\mathbf{i} = {}^t [1 \ 0 \ 0]$, $\mathbf{j} = {}^t [0 \ 1 \ 0]$, $\mathbf{k} = {}^t [0 \ 0 \ 1]$ に対して,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (21)$$

が成り立つ。これを確かめよ。

Remark. 任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{a} = {}^t [a_1 \ a_2 \ a_3]$ は基本ベクトルの 1 次結合として $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ と表すことができる。書物によってはこのような表記法もよく使われる。

練習 5.18. 外積は形式的に次のように表せることを示せ。(ヒント: 右辺の 3 次行列式を形式的に計算せよ)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (22)$$

命題 5.19 (外積の性質)。外積は次を満たす。

- (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- (ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$
- (iii) $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) \quad (\text{ただし, } k \in \mathbb{R})$
- (iv) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{分配法則})$

証明. 直接計算または行列式の性質を用いて示せるので、読者の練習とする. □

Remark. (iii) のベクトルは単に $k\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す。 (ii) の右辺も単に $-\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ と表す。

命題 5.20. 3 次元列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の内積と外積に関して

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}| \quad (3 \text{ 次行列式}) \quad (23)$$

が成り立つ。(これを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のスカラー **3 重積**または混合 **3 重積**という。)

証明. $\mathbf{a} = {}^t \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = {}^t \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = {}^t \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ とする. 右辺の行列式を第 1 列で余因子展開することで

$$|\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (25)$$

を得る. 同様に, 第 3 列で余因子展開すれば

$$|\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (27)$$

を得る. \square

定理 5.21 (外積の幾何的性質). 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は次を満たす.

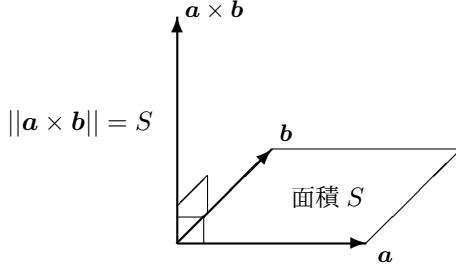
(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} とも \mathbf{b} とも直交する.

(ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta \quad (28)$$

となる (θ は \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角). すなわち, \mathbf{a} と \mathbf{b} が作る平行四辺形の面積に等しい.

(iii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは \mathbf{a} から \mathbf{b} に右ねじを回したときの進行方向である.



証明. (i) 内積が 0 になることを示せばよい. 行列式の値は二つの列が同じ場合は 0 になるので,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a}| = 0, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{b}| = 0 \quad (29)$$

となる.

(ii) 計算によって,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad (30)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \quad (31)$$

$$= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (32)$$

となる. 命題 5.10 よりこれは \mathbf{a} と \mathbf{b} が作る平行四辺形の面積 S の 2 乗である.

(iii) 座標軸を回転させることで, \mathbf{a} と \mathbf{b} が xy 平面にある場合だけ考えれば良い. $\mathbf{a} = {}^t \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = {}^t \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix}$ とすると,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |a_1 & b_1| \\ |a_2 & b_2| \end{bmatrix} \quad (33)$$

となる. これは z 軸上のベクトルだから, z 成分の正負によって $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きが決まる. 命題 5.12 より, \mathbf{a} から \mathbf{b} への正の向きの角 φ が $0 \leq \varphi \leq \pi$ なら, z 成分は正. すなわち, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は z 軸の正の方向を向く. これは \mathbf{a} から \mathbf{b} へ右ねじを回したときの進行方向になっている. $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ のときも同様である. \square

演習問題

5-1. $\mathbf{a} = {}^t \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = {}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = {}^t \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とする. 次を求めよ.

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (2) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- (3) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- (4) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- (5) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
- (6) 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$ を頂点とする三角形の面積
- (7) 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$ を通る平面の方程式 (外積を利用すること)
- (8) 3 点 $A(2, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(-2, 3, 1)$ を通る平面の方程式 (外積を利用すること)

5-2. 空間の 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積は, スカラー 3 重積 (命題 5.20 参照) の絶対値で与えられることを示せ.