8 スカラー場とベクトル場

- スカラー場・・・各点に値が与えられている空間 (閉じられた空間内の気体の密度, 気温, 湿度等).
  数学的には, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ をその空間の点とし, 3 変数関数 $f(\boldsymbol{r})$ を考えることに相当する.

- ベクトル場・・・各点にベクトルが与えられている空間 (磁力の場, 重力の場等).
  数学的には, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ をその空間の点とし, 3 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ を考えることに相当する.

9 線積分

9.1 (スカラー場の線積分). $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた滑らかな曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ があるとする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分を

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\, dt \tag{1}$$

と定義する. 特に, 曲線 C のパラメータが弧長 s のとき, $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\, ds$ と表す. これは次のようにして求められる:

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\, ds = \int_C f(\boldsymbol{r}) \frac{ds}{dt}\, dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left\| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right\| dt. \tag{2}$$

例 9.2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. スカラー場を $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2$, 曲線 C を円らせん

$$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{3}$$

とする. このとき,

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt = 2\pi + \frac{8}{3}\pi^3, \qquad \int_C f(\boldsymbol{r})\, ds = 2\sqrt{2}\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi^3. \tag{4}$$

9.3 (ベクトル場の線積分). $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた滑らかな曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ があるとする. このとき, ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分を

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\, dt \tag{5}$$

と定義する. ただし,「$\cdot$」はベクトルの内積を表す. ここで,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

と成分表示すると, 上式は

$$\int_C (F_1(\boldsymbol{r})\, dx + F_2(\boldsymbol{r})\, dy + F_3(\boldsymbol{r})\, dz) = \int_a^b \left(F_1(\boldsymbol{r}(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(\boldsymbol{r}(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(\boldsymbol{r}(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt \tag{7}$$

と表せる. より簡潔に次のように表すこともある:

$$\int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt. \tag{8}$$

Remark. 線積分の値は曲線 C のパラメータ表示の仕方によらない．確認しよう．曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ を, 変数変換 $t = \varphi(u)$, $a = \varphi(a_2), b = \varphi(b_2)$ で u をパラメータとする表示に変換したとする．それを便宜上 C_2 と表す．$C_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi(u)) = \boldsymbol{r}_2(u)$, $a_2 \leq u \leq b_2$．このとき, 線積分の定義ならびに合成関数の微分法と置換積分法より,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{a_2}^{b_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(u)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2(u)}{du}\, du \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du}\, du = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Remark. 上の補注より, 特にパラメータ t として弧長 s を取ることができる．この場合は, 曲線上の各点における接ベクトル $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ が単位ベクトルになるため, それを $\boldsymbol{u}(s)$ で表すと

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\, ds = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{u}(s)\, ds \tag{9}$$

となる．内積 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の成分, すなわち接線成分を与える．

Remark. 線積分の記号について, C が閉曲線のときは $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ とも記す．

命題 9.4 (線積分の性質)**.** 線積分について次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_C (\lambda \boldsymbol{F} + \mu \boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lambda \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \mu \int_C \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}$ $\quad$ (λ, μ は定数)

(2) $C = C_1 + C_2$ (滑らかな 2 曲線 C_1 と C_2 を繋ぎ合わせたもの) のとき, $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

(3) C の向きを反対にした曲線を $-C$ と表すとき, $\displaystyle\int_{(-C)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

例 9.5. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3y & x & 2\sin^2 z \end{bmatrix}$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(1) C は点 $\mathrm{P}(0,1,0)$ から点 $\mathrm{Q}(1,0,\frac{\pi}{2})$ に至る線分 $\qquad$ (答) $1 + \frac{\pi}{2}$

(2) $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \end{bmatrix}$, $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ (答) 0

例 9.6. 力の場 (重力の場, 電場など) の中の曲線 C に沿って質点 m が, 力 $\boldsymbol{F}$ を受けながら, 始点 P から終点 Q まで移動するとき, 力 $\boldsymbol{F}$ が m に行った仕事 W は線積分で表される:

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{10}$$

演習問題

9-1. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．スカラー場を $f(\boldsymbol{r}) = 10x + 20yz$, 曲線を $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & t & t^2 \end{bmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ とする．このとき, $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt$ と $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\, ds$ を求めよ．

9-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} x^2 + 2y & 7yz & -8x^2 z \end{bmatrix}$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(1) C は原点 O から点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ に至る線分

(2) C は原点 O, 点 $\mathrm{P}(1,1,0)$, 点 $\mathrm{Q}(1,1,1)$ を順次に結ぶ折れ線

(3) $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$, $\quad 0 \leq t \leq 1$

10　特別な線積分

1 変数関数の定積分において, 例えば奇関数の閉区間 $[-a, a]$ 上の積分値は必ず 0 である. このような "被積分関数" や "積分領域" が特別な形をした場合の積分公式が, 線積分においても有る.

10.1 (スカラー場の勾配)**.** $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. 偏微分可能なスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の空間内での変化率を表すものとして, ベクトル場

$$\operatorname{grad}\varphi = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{11}$$

を考える. これをスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の**勾配 (勾配ベクトル場) (gradient)** という. 記号的にベクトル演算子 $\nabla = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ を導入し, $\nabla\varphi$ と書き表すこともある. 今後はこの記号をよく用いる.

例 10.2. スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + 4yz^3$ の勾配は $\nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} 2x & 4z^3 & 12yz^2 \end{bmatrix}$.

例 10.3. スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = C$ (定数) の勾配は $\nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 逆に, スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ がそのすべての点で $\nabla\varphi = \boldsymbol{0}$ を満たせば, φ は定数.

定理 10.4. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. $\varphi(\boldsymbol{r})$ をスカラー場とし, φ の勾配 $\nabla\varphi$ 内の区分的に滑らかな曲線 C (始点 P, 終点 Q) を考える. このとき, $\nabla\varphi$ の C に沿う線積分は次のようになる.

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}). \tag{12}$$

<u>証明</u>. 便宜上, ここでは $\varphi = \varphi(x, y, z)$ と記す. C が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$, $a \leq t \leq b$ と表されているとする. このとき, 線積分の定義, 合成関数の微分法, および微分積分学の基本公式より

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz \right) && (13)\\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt && (14)\\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t))\,dt && (15)\\
&= \Big[\varphi(x(t), y(t), z(t)) \Big]_{t=a}^{t=b} && (16)\\
&= \varphi(x(b), y(b), z(b)) - \varphi(x(a), y(a), z(a)) && (17)\\
&= \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) && (18)
\end{aligned}$$

となる. C が有限個のパラメータ表示された曲線の繋ぎ合わせの場合, 例えば $C = C_1 + C_2$ で点 R が繋ぎ目のときは

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{C_1} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} && (19)\\
&= \{\varphi(\mathrm{R}) - \varphi(\mathrm{P})\} + \{\varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{R})\} && (20)\\
&= \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) && (21)
\end{aligned}$$

となる. 繋ぎ目が 3 つ以上でも同様. □

Remark. 式 (12) は, 線積分の値が曲線の途中経路によらず始終点の値のみで決まることを表している. それゆえ, あるスカラー場の勾配に対する線積分は**経路によらない線積分**と呼ばれ,

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \int_P^Q \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \Big[\varphi \Big]_P^Q = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) \tag{22}$$

とも書く. この定理は明らかに「微分積分学の基本公式」

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a) \tag{23}$$

の拡張となっている.

系 10.5. $\boldsymbol{r} = {}^t\Big[x \quad y \quad z\Big]$ とする. $\varphi(\boldsymbol{r})$ をスカラー場とし, φ の勾配 $\nabla\varphi$ 内の閉曲線 C を考える. このとき,

$$\oint_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{24}$$

証明. 上の定理において特に C が閉曲線ならば点 P と点 Q は同一点なので, $\varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) = 0$ となる. □

例 10.6. $\boldsymbol{r} = {}^t\Big[x \quad y \quad z\Big]$ とする. スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, C は原点 O, 点 $\mathrm{P}(1,1,0)$, 点 $\mathrm{Q}(1,1,1)$ を順次に結ぶ折れ線とする.

解. C の始点は O, 終点は Q であるから,

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \int_O^Q \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \Big[\varphi\Big]_O^Q = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{O}) = (1^2 + 1^2 + 1^2) - (0^2 + 0^2 + 0^2) = 3. \tag{25}$$

例 10.7. $\boldsymbol{r} = {}^t\Big[x \quad y \quad z\Big]$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\Big[3x^2 + y \quad x + 1 \quad 0\Big]$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[t \quad e^t \quad 0\Big], \quad 0 \le t \le 1.$

解. 線積分の定義に従って計算することもできるが, 次のことに気づくと容易に計算できる. $\varphi = x^3 + xy + y$ とおくと, φ はスカラー場で, その勾配は $\nabla\varphi = \boldsymbol{F}$ となる. よって, この線積分は経路によらない. C の始点は $(0,1,0)$, 終点は $(1,e,0)$ なので,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,1,0)}^{(1,e,0)} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \Big[x^3 + xy + y\Big]_{(0,1,0)}^{(1,e,0)} = (1 + e + e) - (0 + 0 + 1) = 2e. \tag{26}$$

演習問題

10-1. $\boldsymbol{r} = {}^t\Big[x \quad y \quad z\Big]$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\Big[x^2 \quad 2y \quad \cos z\Big], \quad C$ は点 $\mathrm{P}(1,0,0)$ から点 $\mathrm{Q}(1,1,\frac{\pi}{2})$ への線分.

(2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\Big[yz \quad xz \quad xy\Big], \quad C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[\cos t \quad \sin t \quad t\Big], \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\Big[y + z \quad x + z \quad x + y\Big], \quad C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[\cosh t \quad \sinh t \quad t\Big], \quad 0 \le t \le 1$

10-2. 例 10.6 と同じ問題を線積分の定義に従って解き, 答えが一致することを確かめよ. (まず $\nabla\varphi$ を求めよ. 次に, 前節のやり方で $\displaystyle\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ.)