11　曲面とベクトル関数

11.1. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とし, 2 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{bmatrix}$ を考える．このとき, $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ は一般に空間内の曲面を表す．これは曲面のパラメータ表示 (u, v がパラメータ) に他ならない．

例 11.2. 2 変数関数のグラフ $S : z = f(x,y)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & f(u,v) \end{bmatrix}$ と表せる．例えば平面 $z = 1 - x - y$ の場合は, $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & 1-u-v \end{bmatrix}$.

例 11.3. 円柱面 $S : x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ と表せる．

例 11.4. 円錐面 $S : z^2 = x^2 + y^2$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & u \end{bmatrix}$ と表せる．

例 11.5. 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = {}^t\begin{bmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{bmatrix}$ と表せる．

11.6 (曲面上の曲線)**.** $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面とする．このとき, もし ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \end{bmatrix}$ ならば, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)) =: \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ は S 上の曲線を表す．特に, $\boldsymbol{r}(u,v)$ において片方のパラメータのみを動かして得られる曲線を**パラメータ曲線**という．u を動かした場合は u **曲線**, v を動かした場合は v **曲線**という．

例 11.7 (例 11.3 の続き)**.** 円柱面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ 上の曲線の例を 3 つ挙げる．

(i) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} t & ct \end{bmatrix}$ (c は定数) ならば, $C : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos t & a\sin t & ct \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$. (円らせん)

(ii) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u & v_0 \end{bmatrix}$ (v_0 は定数) ならば, $C_1 : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v_0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}_1(u)$. (平面 $z = v_0$ 上の円)

(iii) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u_0 & v \end{bmatrix}$ (u_0 は定数) ならば, $C_2 : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u_0 & a\sin u_0 & v \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}_2(v)$. ($z$ 軸に平行な直線)

(C_1 は u 曲線, C_2 は v 曲線. 円らせんはパラメータ曲線ではない．詳しくは図を描いて説明する．)

11.8 (パラメータ曲線の接ベクトル)**.** $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面とする．$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ を S 上の点 P_0 とする．点 P_0 を通るふたつのパラメータ曲線

$$C_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0) =: \tilde{\boldsymbol{r}}_1(u) \qquad (\text{点 } \mathrm{P}_0 \text{ を通る } u \text{ 曲線}), \tag{1}$$

$$C_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v) =: \tilde{\boldsymbol{r}}_2(v) \qquad (\text{点 } \mathrm{P}_0 \text{ を通る } v \text{ 曲線}) \tag{2}$$

を考える．このとき, $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(u)$ と $\tilde{\boldsymbol{r}}_2(v)$ をそれぞれ微分すると

$$\frac{d}{du}\tilde{\boldsymbol{r}}_1(u) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v_0) = \boldsymbol{r}_u(u, v_0), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dv}\tilde{\boldsymbol{r}}_2(v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0, v) = \boldsymbol{r}_v(u_0, v) \tag{4}$$

となる．以上より, 2 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ の点 (u_0, v_0) における偏微分係数 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$, $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ は (もし $\neq \boldsymbol{0}$ なら) それぞれ点 P_0 での C_1 と C_2 の接ベクトルとなることが分かった．

例 11.9 (例 11.7 の続き)**.** 円柱面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ において, u 曲線 C_1 の接ベクトルは $\boldsymbol{r}_u(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} -a\sin u & a\cos u & 0 \end{bmatrix}$ であり, v 曲線 C_2 の接ベクトルは $\boldsymbol{r}_v(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．これらに $(u,v) = (u_0, v_0)$ を代入すれば, その点におけるパラメータ曲線の接ベクトルが具体的に求まる．

11.10 (法ベクトルと接平面)**.** $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面とする．ふたつのパラメータ曲線の接ベクトルの外積を考え,

$$\boldsymbol{N}(u,v) = \boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v) \tag{5}$$

とおく (単に $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ とも書く). $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ となる点では $\boldsymbol{N}$ は曲面に直交する方向を向く. そこで, $\boldsymbol{N}$ を曲面 S の**法ベクトル (法線ベクトル)** という. また, 法ベクトルの長さを 1 に正規化したものを**単位法ベクトル**といい, $\boldsymbol{n}$ で表す ($\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{||\boldsymbol{N}||}\boldsymbol{N}$). S 上の点 P を通り $\boldsymbol{N}$ (または $\boldsymbol{n}$) に直交する平面を曲面 S の点 P における**接平面**という.

例 11.11 (例 11.9 の続き)**.** 円柱面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ の法ベクトルは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = {}^t\begin{bmatrix} -a\sin u & a\cos u & 0 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

となる. 例えば $(u,v) = (\frac{\pi}{4}, 1)$ のときを考える. このときの S 上の点 P は $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 1)$. 点 P での法ベクトルは

$$\boldsymbol{N}(\tfrac{\pi}{4}, 1) = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{2}} & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

よって, 円柱面 S の点 P における接平面は

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 0(z-1) = 0 \tag{8}$$

$$\therefore x + y - \sqrt{2}a = 0. \tag{9}$$

定義 11.12. (1) 曲面 S は**滑らか** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S の法線が S 上の点とともに連続的に変化する.
(2) 曲面 S は**区分的に滑らか** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は有限個の滑らかな曲面を貼り合わせた曲面.

演習問題

11-1. 以下のベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ で定義される曲面を $z = f(x,y)$ または $g(x,y,z) = 0$ の形で表示せよ. ただし, a, b, c は定数である. また, パラメータ曲線を調べよ. さらに法ベクトル $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ を定めよ.

(1) 平面 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & 1-u-v \end{bmatrix}$

(2) 円錐 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & cu \end{bmatrix}$

(3) 回転放物面 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & u^2 \end{bmatrix}$

(4) 楕円放物面 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} au\cos v & bu\sin v & u^2 \end{bmatrix}$

(5) 双曲放物面 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} au\cosh v & bu\sinh v & u^2 \end{bmatrix}$

(6) 双曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\sinh u\cos v & b\sinh u\sin v & c\cosh u \end{bmatrix}$

11-2. 次の曲面にパラメータ表示をひとつ与えよ. 法ベクトルも答えよ.

(1) 平面 $x = z$

(2) 平面 $3x + 4y + 5z = 6$

(3) 楕円柱 $4x^2 + 9y^2 = 36$

(4) 双曲柱 $x^2 - y^2 = 1$

(5) 楕円錐 $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$

12　面積分

曲面の面素と表面積

12.1 (面素)**.** $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ の上に 4 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v), \quad \boldsymbol{r}(u, v + \Delta v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) \tag{10}$$

として取る. これらは互いに近い点とし, 微小図形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ を考え, その面積を ΔS とする. ΔS は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ が作る平行四辺形の面積で近似できる. ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \fallingdotseq \frac{\partial r}{\partial u}\Delta u \quad (u \text{ 曲線の接ベクトル}), \qquad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \fallingdotseq \frac{\partial r}{\partial v}\Delta v \quad (v \text{ 曲線の接ベクトル}) \tag{11}$$

に注意すれば

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\right|\right| \fallingdotseq \left|\left|\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u\right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v\right)\right|\right| = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\right| \Delta u \Delta v \tag{12}$$

を得る. そこで,

$$dS = \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\right| du\, dv \tag{13}$$

とおき, これを S の**面素**あるいは**面積要素**という. 前節の法ベクトルの記号を用いれば

$$dS = ||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||\ du\, dv = ||\boldsymbol{N}||\ du\, dv \tag{14}$$

とも表せる.

定理 12.2 (曲面の表面積)**.** 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, D は閉領域, の表面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\right| du\, dv \quad \left(= \iint_S dS \text{ と書く} \right) \tag{15}$$

で与えられる.

練習 12.3. 滑らかな 2 変数関数のグラフ $S : z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, D は閉領域, の表面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + \{f_x(x, y)\}^2 + \{f_y(x, y)\}^2}\, dx\, dy \tag{16}$$

で与えられることを示せ.

スカラー場の面積分

定義 12.4. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. 曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, D は閉領域, とその上で定義されたスカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ を考える. このとき,

$$\iint_S \varphi(\boldsymbol{r})\, dS = \iint_D \varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) \left|\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\right| du\, dv \tag{17}$$

をスカラー場 φ の曲面 S に沿う**面積分**という. (注意: 特に $\varphi = 1$ なら曲面 S の表面積 $|S|$ を表す.)

ベクトル場の面積分

定義 12.5. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, D は閉領域, があるとする．S の法ベクトル $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ と $\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ のうち, S の向きと一致する方を $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(u,v)$ とする．このとき,

$$\left(\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} =\right) \quad \iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \boldsymbol{N}(u,v)\, du\, dv \tag{18}$$

と定義し, ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S に沿う**面積分**という．ただし,「$\cdot$」は内積, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{||\boldsymbol{N}||}\boldsymbol{N}$ は単位法ベクトル, $dS = ||\boldsymbol{N}||\, du\, dv$ は面素, $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{N}\, du\, dv$ はベクトル面素.

ここで, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{bmatrix}$ と成分表示してみよう．S の法ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{bmatrix}$$

となるので, 仮に $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ ならば

$$\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \left\{ G_1(\boldsymbol{r}(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + G_2(\boldsymbol{r}(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + G_3(\boldsymbol{r}(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\, dv \tag{19}$$

と表せる．右辺はより簡潔に次のように表すこともある:

$$\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \left\{ G_1 \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + G_2 \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + G_3 \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\, dv \tag{20}$$

Remark. 面積分の値は曲面 S のパラメータ表示の仕方によらない．

Remark. $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ とした場合と $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_u$ とした場合では積分値のプラスマイナスが反対になる．

Remark. 面積分は流れの問題において自然な形で現れ, $\boldsymbol{G} = \rho \boldsymbol{v}$ のときに S を通る流束 (単位時間あたりの S を通る流体の質量) を与える．ここで, ρ は流体の密度, $\boldsymbol{v}$ は流れの速度ベクトルである．この意味で, **流束積分**ということもできる．

演習問題

12-1. 半径 a $(a > 0)$ の球の表面積を求めよ．

12-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S に沿う面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} z & x & 2x+3y \end{bmatrix}$, $\quad S : x^2 + y^2 = 9,\ x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4$ (円柱面. 外側がオモテ)

(2) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3z^2 & x & -2y \end{bmatrix}$, $\quad S : 2x + y + z = 2,\ x, y, z \geq 0$ (平面. 原点のない側がオモテ)

(3) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} x-z & y-x & z-y \end{bmatrix}$, $\quad S : z = \sqrt{x^2+y^2},\ x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3$ (円錐面. 外側がオモテ)