13　積分定理

復習と準備

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする.

(1) スカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ の**勾配** (gradient):

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}$$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ の**回転** (rotation, curl):

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}F_3 - \frac{\partial}{\partial z}F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1 - \frac{\partial}{\partial x}F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1 \end{bmatrix}$$

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ の**発散** (divergence):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{G} = \nabla\cdot\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}G_1 + \frac{\partial}{\partial y}G_2 + \frac{\partial}{\partial z}G_3$$

例 13.1. $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} yz & 3xz & z \end{bmatrix}$ のとき, $\nabla\times\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} -3x & y & 2z \end{bmatrix}$.

例 13.2. $\boldsymbol{G} = {}^t\begin{bmatrix} x^2+y & \sin xyz & e^{xyz} \end{bmatrix}$ のとき, $\nabla\cdot\boldsymbol{G} = 2x + xz\cos xyz + xy\,e^{xyz}$.

練習 13.3. C^2 級のスカラー場 φ に対して $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. これを示せ.

練習 13.4. C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対して $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$ が成り立つ. これを示せ.

積分定理

定理 13.5 (微分積分学の基本公式)**.** $I = [a,b]$ を有界閉区間とする. このとき, I 上 C^1 級の関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b \frac{d}{dx}f(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{1}$$

が成り立つ. (補注: 右辺は I の境界 $\partial I = \{a,b\}$ から定まる値と捉えることができる.)

定理 13.6 (経路によらない線積分)**.** C を空間内の区分的に滑らかな向き付けられた曲線とし, その始点を A, 終点を B とする. このとき, 曲線 C を含む領域内で C^1 級のスカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_C (\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ. (補注: 右辺は C の境界 $\partial C = \{A,B\}$ から定まる値と捉えることができる.)

定理 13.7 (**Green の定理**, 2 重積分と線積分の変換)**.** D を平面上の有界閉領域とし, ∂D をその境界とする. ただし, ∂D は区分的に滑らかな単純閉曲線 (自身と交わらない閉じた曲線) で, その向きは D の内部を左手に触りながら進む向きとする. このとき, D を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} &\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy \\ &= \oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial D} (F_1\, dx + F_2\, dy) \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ.

定理 13.8 (**Stokes の定理**, 面積分と線積分の変換)**.** S を空間内の区分的に滑らかな向き付けられた曲面とし, ∂S をその境界とする. ただし, ∂S は区分的に滑らかな単純閉曲線 (自身と交わらない閉じた曲線) で, その向きは S のオモテ面の内部を左手に触りながら進む向きとする. このとき, S を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} &\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS \\ &= \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial S} (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ.

定理 13.9 (**Gauss の発散定理**, 3 重積分と面積分の変換)**.** V を空間内の有界閉領域とし, ∂V をその境界面とする. ただし, ∂V は区分的に滑らかな向き付けられる曲面で, その向きは V の外側がオモテとなる向きとする. このとき, V を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{G})\, dx\, dy\, dz &= \iiint_V \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &= \iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ.

演習問題

13-1. 平面において, 単純閉曲線で囲まれた領域 D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y\, dx + x\, dy) \tag{6}$$

で与えられることを示せ.

13-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} -y & x - 2xz & xy \end{bmatrix}$, S は半球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ に z 軸の向きをもつ曲面とする. このとき, 面積分 $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.

13-3. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. ガウスの発散定理を用いて面積分 $\displaystyle\iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.
ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3x & y^2 & xz \end{bmatrix}$, V は面 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ で囲まれた領域.