14　ベクトル解析の演習問題 (積分計算中心)

演習問題

14-1. 放物線 $C : y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ の長さ $|C|$ を求めよ.

14-2. 曲面 $S : z = xy$, $x^2 + y^2 \leq a^2$ $(a > 0)$ の面積 $|S|$ を求めよ.

14-3. 1 次微分形式 ω の, 平面上の閉領域 D の境界線 ∂D に沿う線積分 $\displaystyle\oint_{\partial D} \omega$ を求めよ.

(1) $\omega = (x + y^2)\,dx + (x^2 + y)\,dy$,　D は放物線 $y = x^2$ と直線 $x + y = 2$ で囲まれた領域.

(2) $\omega = (x^2 - 4y^2)\,dx + (2y - 3xy)\,dy$,　D: 3 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形の周および内部.

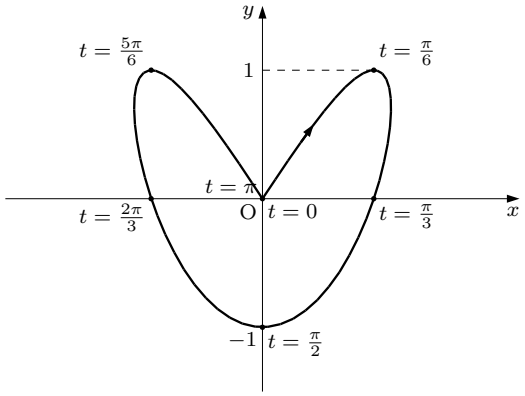
(3) $\omega = (x^2 - 4y^2)\,dx + (2y - 3xy)\,dy$,　D: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域.

14-4. 以下の問いに答えよ.

(1) 平面上の有界閉領域 D の面積 $|D|$ は次のいずれの式でも与えられる. それぞれを示せ.

$$|D| = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} \{(-y)\,dx + x\,dy\}, \qquad |D| = \oint_{\partial D} (-y)\,dx, \qquad |D| = \oint_{\partial D} x\,dy$$

(2) 上のいずれかの公式を用いて閉曲線 $C : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 3t \end{bmatrix}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ によって囲まれた領域の面積を求めよ. なお, この曲線はリサージュ曲線と呼ばれる.



14-5. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ の, 境界のある向き付けられた曲面 S に沿う面積分 $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} x^3 + 3y & 2x^2 + 5z & 5y + z \end{bmatrix}$,　$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$,　$z \geq 0$　(半球, 外側向き)

(2) $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} -4z & 2x & -2x \end{bmatrix}$,　$S : z = y + 1$,　$x^2 + y^2 \leq 1$　(平面の一部 (楕円形), z 軸方向の向き)

(3) $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} 2x + y & x & 3z^2 \end{bmatrix}$,　$S : z = y + 1$,　$x^2 + y^2 \leq 1$　(平面の一部 (楕円形), z 軸方向の向き)

(4) $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} 2x + y & x & 3z^2 \end{bmatrix}$,　$S : x + y + z = 1$,　$x, y, z \geq 0$　(平面の一部 (三角形), z 軸方向の向き)

14-6. ベクトル場 $\boldsymbol{G}$ の, 空間閉領域 V の境界面 ∂V に沿う面積分 $\displaystyle\iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{G} = {}^t\begin{bmatrix} x^2 & yz & x + y \end{bmatrix}$,　V は面 $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = y$ で囲まれた領域 (三角柱)

(2) $\boldsymbol{G} = {}^t\begin{bmatrix} 7x & 1 & -z \end{bmatrix}$,　$V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$　(球)

(3) $\boldsymbol{G} = {}^t\begin{bmatrix} 5 & 10y & z^3 \end{bmatrix}$,　$V : 0 \leq x \leq 1$,　$\frac{x}{2} \leq y \leq x$,　$0 \leq z \leq y$　(四角錐)