頻出の言葉や論理記号など — Ver. 2015.4.10　(担当: 谷戸光昭)

1. 数学の本や講義において頻出の言葉

- **定義** (Definition, 略 Def.), **定義する** (define)
  新出の言葉や記号などに (数学的な) 意味を定めること.

- **命題** (Proposition, 略 Prop.)
  次のように二通りの意味がある.

  (1) 正しい (**真**) か正しくない (**偽**) かが定まる文章や式のこと.
  例.「任意の実数 x に対して, x より大きい実数 y が存在する.」は真の命題.
  例.「任意の実数 x に対して, $xy = 1$ となる実数 y が存在する.」は偽の命題.

  (2) 上の (1) における真の命題のこと.

  <u>以下, 単に命題といったら, 真の命題を意味するものとする.</u>

- **公理** (Axiom)
  明らかに正しいとして認められた命題のこと. 自明な真理. そのほかの命題を導き出すための前提として導入される最も基本的な仮定.

  公理の例.

  i) 2 つの点が与えられたとき, その 2 点を通る直線を引くことができる. (ユークリッド幾何学)

  ii) $a = b$ ならば $a + c = b + c$ である. (ユークリッド原論より)

  iii) どんな自然数に対しても, その数の「次の」自然数が存在する. (ペアノの公理)

- **証明** (Proof)
  定義や公理, あるいは既知の命題を仮定として, ある命題が正しいことを論理的に導くこと. 論証.

- **定理** (Theorem, 略 Thm.)
  命題のうち特に重要度が高いもの.

  (ピタゴラスの定理, 三角関数の加法定理, 平均値の定理, などのように名前が付いているものから, 特に名前が付いていないものまで様々である.)

- **補題** (Lemma, 略 Lem.)
  定理や命題を証明する際に導入される補助的な命題のこと. 補助定理ともいう.

- **系** (Corollary, 略 Cor.)
  定理や命題の直接の帰結として得られる命題のこと.

2. 数に関する集合の記号

- 自然数全体の集合：$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
  (Natural numbers)　※ 0 を含める流儀もある.
- 整数全体の集合：$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
  (Integers, 独 Zahlen)
- 有理数全体の集合：$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$
  (Rational numbers, Quotients = 商)
- 実数全体の集合：$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$ 無理数全体 $\}$
  (Real numbers)
- 複素数全体の集合：$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  (Complex numbers)

包含関係：$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

3. 論理記号

$\therefore$	ゆえに, therefore	s.t. 〜	〜のような, such that
$\because$	なぜならば, because	$\vee$	または, or
$\exists$	存在する, exist (**存在記号**)	$\wedge$	かつ, and
$\exists!$, $\exists 1$	一意的に存在する	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	左辺を右辺で定義する
$\forall$	任意の, any, arbitrary (**全称記号**)	$:=$	左辺を右辺で定義する
$\Rightarrow$	ならば, then	$\Leftrightarrow$	同値, 必要十分, if and only if

例 1. $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界であることの定義.
a) $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in S\ \ (x \leq M)$　　[補注: $\exists M \in \mathbb{R}\ \ (\forall x \in S\ \ (x \leq M))$ と同義]
b) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall x \in S\ \ (x \leq M)$
c) There exists $M \in \mathbb{R}$ such that, for any $x \in S$, $x \leq M$.
d) There is at least one real number M such that, for any $x \in S$, x is less than or equal to M.
e) ある実数 M が存在して, 任意の $x \in S$ に対して, $x \leq M$ となる.

例 2. $\mathbb{R}$ の部分集合 S が上に有界でないことを表す論理文. (**例 1 の否定文**)
a) $\forall M \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in S\ \ (x > M)$　　[補注: $\forall M \in \mathbb{R}\ \ (\exists x \in S\ \ (x > M))$ と同義]
b) $\forall M \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in S$ s.t. $x > M$
c) For any $M \in \mathbb{R}$, there exists $x \in S$ such that $x > M$.
d) For any $M \in \mathbb{R}$, there is at least one element x in S such that x is greater than M.
e) 任意の実数 M に対して, ある $x \in S$ が存在して, $x > M$ となる.

例 3. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束することの定義.
a) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon\ )$
c) For any $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that, for any $n \in \mathbb{N}$, if $n > N$ then $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.
e) 任意の正の ε に対し, ある自然数 N が存在して, 任意の n について, もし n が N より大きいならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる.