5　逆三角関数の定義とグラフ

定義 5.1 (逆正弦関数)**.**
$-1 \leq y \leq 1$ なる任意の実数 y を与える．このとき, $y = \sin x$ を満たす実数 x は無数に存在する．
(例えば, $y = \frac{1}{2}$ ならば, 三角方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$ のすべての解は $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数) である.)
ところが, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に限ると, $y = \sin x$ となる実数 x はただひとつに決まる．
(例えば, $y = \frac{1}{2}$ ならば, 三角方程式 $\sin x = \frac{1}{2}$ (ただし $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の解は $x = \frac{\pi}{6}$ のみ.)
そこで, 任意の実数 y (ただし $-1 \leq y \leq 1$) に対して $y = \sin x$ となる実数 x (ただし $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を対応させる規則を考え, それを**逆正弦関数**という．記号では $x = \mathrm{Sin}^{-1} y$ あるいは $x = \mathrm{Arcsin}\, y$ と表す．読むときはいずれも**アークサイン**と読む.

$$\begin{aligned} & y = \sin x \quad (\text{定義域 } -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2},\ \text{値域 } -1 \leq y \leq 1) \\ \iff & x = \mathrm{Sin}^{-1} y \quad (\text{定義域 } -1 \leq y \leq 1,\ \text{値域 } -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{1}$$

x と y の文字を入れ替え, 次のように表すこともできる.

$$\begin{aligned} & y = \mathrm{Sin}^{-1} x \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 1,\ \text{値域 } -\tfrac{\pi}{2} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2}) \\ \iff & x = \sin y \quad (\text{定義域 } -\tfrac{\pi}{2} \leq y \leq \tfrac{\pi}{2},\ \text{値域 } -1 \leq x \leq 1) \end{aligned} \tag{2}$$

定義 5.2 (逆余弦関数)**.**
$-1 \leq y \leq 1$ なる任意の実数 y を与える．このとき, $y = \cos x$ を満たす実数 x は無数に存在する．
ところが, $0 \leq x \leq \pi$ の範囲に限ると, $y = \cos x$ となる実数 x はただひとつに決まる．
そこで, 任意の実数 y (ただし $-1 \leq y \leq 1$) に対して $y = \cos x$ となる実数 x (ただし $0 \leq x \leq \pi$) を対応させる規則を考え, それを**逆余弦関数**という．記号では $x = \mathrm{Cos}^{-1} y$ あるいは $x = \mathrm{Arccos}\, y$ と表す．読むときはいずれも**アークコサイン**と読む.

$$\begin{aligned} & y = \cos x \quad (\text{定義域 } 0 \leq x \leq \pi,\ \text{値域 } -1 \leq y \leq 1) \\ \iff & x = \mathrm{Cos}^{-1} y \quad (\text{定義域 } -1 \leq y \leq 1,\ \text{値域 } 0 \leq x \leq \pi) \end{aligned} \tag{3}$$

x と y の文字を入れ替え, 次のように表すこともできる.

$$\begin{aligned} & y = \mathrm{Cos}^{-1} x \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 1,\ \text{値域 } 0 \leq y \leq \pi) \\ \iff & x = \cos y \quad (\text{定義域 } 0 \leq y \leq \pi,\ \text{値域 } -1 \leq x \leq 1) \end{aligned} \tag{4}$$

定義 5.3 (逆正接関数)**.**
任意の実数 y を与える．このとき, $y = \tan x$ を満たす実数 x は無数に存在する．
ところが, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に限ると, $y = \tan x$ となる実数 x はただひとつに決まる．
そこで, 任意の実数 y に対して $y = \tan x$ となる実数 x (ただし $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) を対応させる規則を考え, それを**逆正接関数**という．記号では $x = \mathrm{Tan}^{-1} y$ あるいは $x = \mathrm{Arctan}\, y$ と表す．読むときはいずれも**アークタンジェント**と読む.

$$\begin{aligned} & y = \tan x \quad (\text{定義域 } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},\ \text{値域 } -\infty < y < \infty) \\ \iff & x = \mathrm{Tan}^{-1} y \quad (\text{定義域 } -\infty < y < \infty,\ \text{値域 } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{5}$$

x と y の文字を入れ替え, 次のように表すこともできる.

$$\begin{aligned} & y = \mathrm{Tan}^{-1} x \quad (\text{定義域 } -\infty < x < \infty,\ \text{値域 } -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2}) \\ \iff & x = \tan y \quad (\text{定義域 } -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2},\ \text{値域 } -\infty < x < \infty) \end{aligned} \tag{6}$$

三角関数と逆三角関数のグラフ.

(1) $y = \sin x$ (定義域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 値域 $[-1, 1]$)

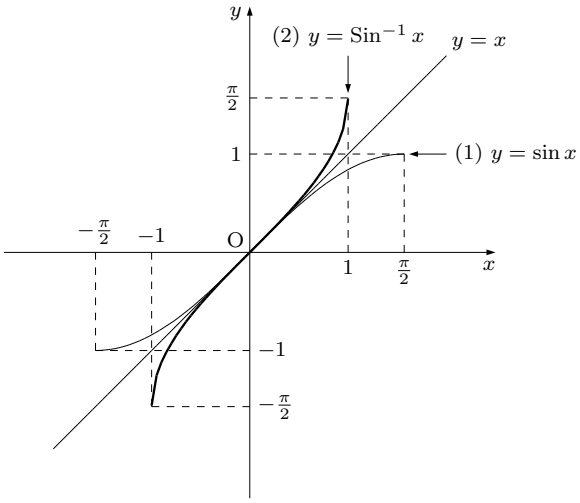
(2) $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ (定義域 $[-1, 1]$, 値域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$): $[-1, 1]$ で連続, 強い意味での単調増加, $(-1, 1)$ で微分可能.

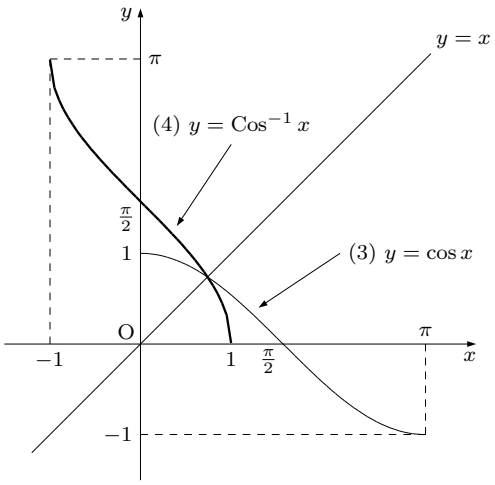
(3) $y = \cos x$ (定義域 $[0, \pi]$, 値域 $[-1, 1]$)

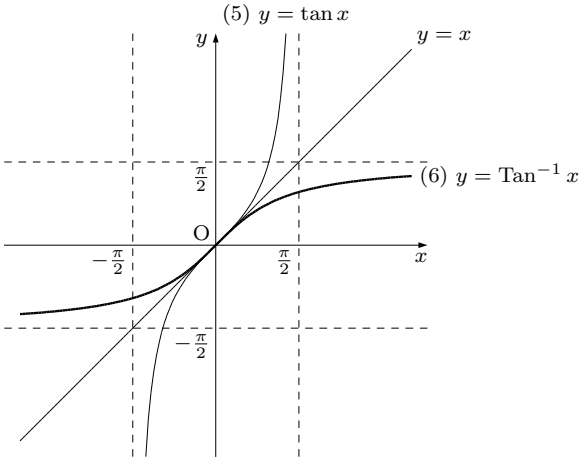
(4) $y = \mathrm{Cos}^{-1} x$ (定義域 $[-1, 1]$, 値域 $[0, \pi]$): $[-1, 1]$ で連続, 強い意味での単調減少, $(-1, 1)$ で微分可能.

(5) $y = \tan x$ (定義域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 値域 $(-\infty, \infty)$)

(6) $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ (定義域 $(-\infty, \infty)$, 値域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$): $(-\infty, \infty)$ で連続, 強い意味での単調増加, 微分可能.







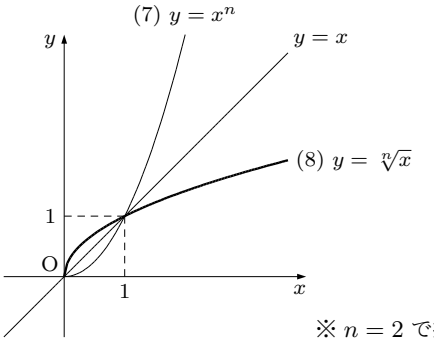
★参考: 高校で学習済みの逆関数のグラフ

(7) $y = x^n$ (定義域 $[0, \infty)$, 値域 $[0, \infty)$)

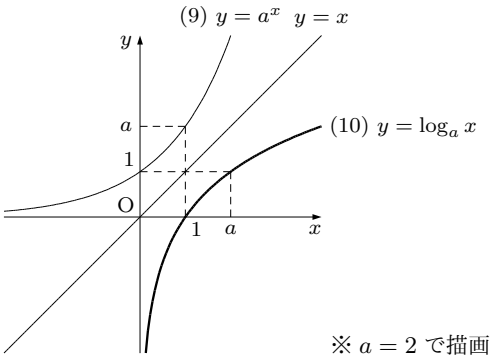
(8) $y = \sqrt[n]{x}$ (定義域 $[0, \infty)$, 値域 $[0, \infty)$)

(9) $y = a^x$ (定義域 $(-\infty, \infty)$, 値域 $(0, \infty)$)

(10) $y = \log_a x$ (定義域 $(0, \infty)$, 値域 $(-\infty, \infty)$)



※ $n = 2$ で描画



※ $a = 2$ で描画