6　関数の微分可能性

定義 6.1 (微分可能性)**.** 関数 $f(x)$ が点 a で**微分可能**であるとは, 極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad\left(=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\tag{1}$$

が存在することと定める. この極限を $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $\frac{d}{dx}f(a)$ などと表し, $f(x)$ の点 a における**微分係数**という. $f(x)$ が区間 I の任意の点で微分可能であるとき, $f(x)$ は I で微分可能であるという. そのとき, 任意の $x\in I$ に対して微分係数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\tag{2}$$

を対応させる I 上の関数が定まる. これを $f(x)$ の**導関数**といい, $f'(x)$ の他, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ とも表す.

命題 6.2. 関数 $f(x)$ が点 a で微分可能ならば $f(x)$ は点 a で連続である.

定理 6.3 (微分可能性の言い換え)**.** 関数 $f(x)$ が点 a で微分可能であるための必要十分条件は, ある実数 A とある関数 $\varepsilon(h)$ が存在して

$$f(a+h)=f(a)+Ah+\varepsilon(h),\quad \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0\tag{3}$$

が成り立つことであり, そのとき $A=f'(a)$ である.

定理 6.4 (一般的な微分公式)**.** $f=f(x)$, $g=g(x)$ を微分可能な関数, c を定数とすると, 次が成り立つ:
(1) $(cf)'=cf'$ (定数倍の微分),　$(f+g)'=f'+g'$ (和の微分),　$(f-g)'=f'-g'$ (差の微分),
　$(fg)'=f'g+fg'$ (積の微分),　$(f/g)'=(f'g-fg')/g^2$ (商の微分).
(2) $y=f(t)$ と $t=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数は $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ または $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$.
(3) $y=f(x)$ の逆関数 $x=f^{-1}(y)$ の導関数は $\frac{dx}{dy}=1/(\frac{dy}{dx})$. ただし, $\frac{dy}{dx}\neq 0$ とする.

定理 6.5 (基本的な関数の導関数)**.** a は正の定数とする. 断りが無い限り微分可能な区間は $(-\infty,\infty)$ である:
(1) 任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.
(2) $(\sin x)'=\cos x$,　$(\cos x)'=-\sin x$,　$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ なら $(\tan x)'=1/\cos^2 x$.
(3) $(a^x)'=a^x\log a$, 特に $(e^x)'=e^x$.　注意: e^x は $\exp x$ と表すこともある. $(\exp x)'=\exp x$.
(4) $x\in(0,\infty)$ なら $(\log_a x)'=1/(x\log a)$,　特に $(\log x)'=1/x$.
(5) $x\in(-\infty,0)$ なら $(\log_a(-x))'=1/(x\log a)$,　特に $(\log(-x))'=1/x$.

★以下の関数の微分可能な区間は？導関数は？
逆三角関数: $\mathrm{Sin}^{-1}x$,　$\mathrm{Cos}^{-1}x$,　$\mathrm{Tan}^{-1}x$.
双曲線関数: $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$,　$\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$,　$\tanh x=\sinh x/\cosh x$.
双曲線関数の逆関数: $\sinh^{-1}x$,　$\cosh^{-1}x$,　$\tanh^{-1}x$.
(三角関数のうちマイナーな 3 つ: $\sec x=1/\cos x$,　$\mathrm{cosec}\,x=1/\sin x$,　$\cot x=\cos x/\sin x$.)

演習問題

6-1. 命題 6.2 および定理 6.3 を証明せよ.

6-2. 導関数を求めよ. (1) $(x+1)^3(x+2)^4$　(2) $\log(\log x)$　(3) $\exp(x^x)$ $(=e^{x^x})$　(4) $(\tan x)^{\sin x}$
　(5) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$　(6) $\mathrm{Sin}^{-1}(x^3+1)$　(7) $\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{3}{x}\right)$　(8) $a^{\mathrm{Tan}^{-1}x}$ $(a>0)$
　(9) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}\right)$

7　微分可能な関数の性質

定義 7.1 (接線および 1 次近似)**.** 関数 $f(x)$ は点 a で微分可能 (すなわち, 微分係数 $f'(a)$ が存在) とする. そのときに一意的に定まる直線 $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ を, 曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における**接線**という. また, h が 0 に近いとき, $f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$ となる. これを関数 $f(x)$ の点 a のまわりの **1 次近似**という. 特に点 0 のまわりの 1 次近似は $f(h) \fallingdotseq f(0) + f'(0)h$.

定義 7.2 (極大)**.** 関数 $f(x)$ は点 c を含むある区間で定義されているとする. (※ 微分可能でなくても良い)
・$f(x)$ は点 c で**極大**
　$\Longleftrightarrow$ 点 c を含むある開区間 J が存在し, 任意の $x \in J$ $(x \neq c)$ に対して $f(x) < f(c)$ が成り立つ.
　$\Longleftrightarrow$ 点 c を含むある開区間 J が存在し, $f(x)$ は J 上点 c でのみ最大値を取る.
このとき, $f(c)$ を**極大値**という.　　(※ 極小の定義も同様)

定理 7.3. 関数 $f(x)$ は点 c を含む開区間 I で定義されており, 点 c で微分可能とする. このとき, $f(x)$ が点 c で最大値を取るならば $f'(c) = 0$ である. (注意: 最小値, 極大値, 極小値のときも同様のことが成り立つ.)

　証明の方針: 右微分係数と左微分係数を調べよ.

定理 7.4 (ロルの定理)**.** 関数 $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ 上で連続, 開区間 (a, b) 上で微分可能とする.
このとき, もし $f(a) = f(b)$ なら, ある $c \in (a, b)$ が存在して, $f'(c) = 0$ となる.

定理 7.5 (平均値の定理)**.** (ラグランジュの平均値の定理とも呼ばれる.) 関数 $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ 上で連続, 開区間 (a, b) 上で微分可能とする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して次を満たす:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \quad \text{あるいは} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{4}$$

　証明の方針: $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ にロルの定理を適用せよ.

定理 7.6. 関数 $f(x)$ は区間 I 上で微分可能とする. このとき, 次が成り立つ.
(1) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) = 0$ ならば, $f(x)$ は I 上で定数である.
(2) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) > 0$ ならば, $f(x)$ は I 上で強い意味の単調増加である.
(3) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) < 0$ ならば, $f(x)$ は I 上で強い意味の単調減少である.

系 7.7. $f(x), g(x)$ が区間 I 上微分可能で $f'(x) = g'(x)$ ならば I 上で $f(x) = g(x) + C$ (C はある定数).

定理 7.8 (コーシーの平均値の定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ 上で連続, 開区間 (a, b) 上で微分可能とする. さらに, 任意の $x \in (a, b)$ に対して $g'(x) \neq 0$ とする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して次を満たす:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5}$$

　証明の方針: $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x) - g(a)\}$ にロルの定理を適用せよ.

定理 7.9 (ベルヌーイ-ロピタルの定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ は点 a の近くで定義されていて, 微分可能とする. このとき, もし $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ で $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在して $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる.

演習問題　7-1. 定理 7.6 を証明せよ.　7-2. 極限を求めよ. (1) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$　(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 + x - e^x}$
7-3. 関数 $y = x \log x$ の増減と極値を調べ, グラフの概形を描け.

8　高階導関数

定義 8.1. 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能で, 導関数 $f'(x)$ も I で微分可能であるとき, $f(x)$ は I で **2 回微分可能**であるという. $f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の **2 階導関数**といい, $f''(x)$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などと表す: $f''(x) = \{f'(x)\}'$. 以下同様に, $f(x)$ が次々に n 回微分できるとき, $f(x)$ は n **回微分可能**であるという. f を n 回微分して得られる関数を f の n **階導関数**といい, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などと表す. また, $f^{(0)}(x) = f(x)$ と定める.

f が I で n 回微分可能でかつ $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき, f は I で C^n **級**であるという. f が I で何回でも微分できるとき, f は I で C^∞ **級**であるという.

例 1. 正の整数 m, n に対して次が成り立つ:

$$(x^m)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}x^m = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}. \tag{6}$$

特に, x^m の m 階導関数は $m!$ (定数関数) で, $(m+1)$ 階以上の導関数は 0 である. $n > m$ のとき, 上の式の右辺の因子の中に 0 が現れることに注意.

例 2. 正の整数 m, n に対して次が成り立つ:

$$(1/x^m)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x^m} = \frac{(-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{x^{m+n}}. \tag{7}$$

例 3.

$$(e^x)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x, \qquad (e^{ax})^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax} \quad (a \text{ は定数}). \tag{8}$$

例 4.

$$(\sin x)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin(x + n\pi/2), \qquad (\cos x)^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos(x + n\pi/2). \tag{9}$$

定理 8.2. $f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 定数 α, β に対して次が成り立つ.

$$\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x). \tag{10}$$

定理 8.3 (ライプニッツの公式)**.** $f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 次が成り立つ.

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x). \tag{11}$$

補注. 数学的帰納法を用いれば証明できる. この公式は 2 項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ に似ている.

例 5. ライプニッツの公式より, $(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

演習問題

8-1. $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とする.

(1) $(x^2+1)f'(x) = 1$ が成り立つことを示せ.

(2) (1) の両辺を n 回微分することにより, 次の式を示せ.

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

(3) $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!$ を示せ.

9　テイラーの定理と応用

定理 9.1 (テイラーの定理)**.** $n \geq 1$ とする. 関数 $f(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ 上で C^{n-1} 級, かつ $(n-1)$ 階導関数 $f^{(n-1)}(x)$ は開区間 (a,b) 上で微分可能とする. このとき, ある $c \in (a,b)$ が存在して

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \tag{T1}$$

が成り立つ. (ある $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n \tag{T1'}$$

が成り立つ.)

Remark. (T1) や (T1') の右辺最終項を n **次剰余項**といい, 記号 R_n で表すことが多い:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad \text{あるいは} \quad R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n.$$

Remark. $n=1$ のときのテイラーの定理は平均値の定理と同値である.

Remark. $a > b$ のとき (すなわち $[b,a]$ 上で考えるとき) でも (T1), (T1') は成立する.

証明の方針: $F(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$, $G(x) = (b-x)^n$ にコーシーの平均値の定理を適用.

定義 9.2. 関数 $f(x)$ は点 a を含む開区間 I 上で n 回微分可能とする $(n \geq 1)$. このとき, 任意の $x \in I$ $(x \neq a)$ に対して, 定理 9.1 より, ある $\theta \in (0,1)$ が存在して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \tag{T2}$$

が成り立つ. (T2) を $f(x)$ の**点 a における (剰余項を n 次とする) 有限テイラー展開**という. 特に, 点 0 における有限テイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \tag{M2}$$

が考えられる場合, これを単に **(剰余項を n 次とする) 有限マクローリン展開**という.

Remark. (T2) の意味: 点 a の周辺で関数 $f(x)$ は右辺の「多項式＋剰余項 R_n」に等しい. 特に R_n が十分小さければ, $f(x)$ は多項式とほぼ等しくなる. → 近似計算への応用

例 1-1. 関数 $f(x) = e^x$ の点 0 における剰余項を n 次とする有限テイラー展開は

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1). \tag{12}$$

例 1-2 (ネイピア数 e の近似値). 式 (12) に $x=1$ を代入すると

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta_n}}{n!} \quad (0 < \theta_n < 1) \tag{13}$$

となる. ただし, θ は n に依存するため, ここでは θ_n と表した. 例えば $n=6$ で考えてみよう:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{e^{\theta_6}}{6!} = 2.71\dot{6} + \frac{e^{\theta_6}}{720} \quad (0 < \theta_6 < 1). \tag{14}$$

ここで, $2 < e \leq 3$ であったから,

$$\frac{e^{\theta_6}}{720} < \frac{e^1}{720} \leq \frac{3}{720} = \frac{1}{240} = 0.0041\dot{6} \tag{15}$$

である. よって, e の真値と $2.71\dot{6}$ (近似値) との差は $0.0041\dot{6}$ よりも小さいことが分かった. したがって, e を小数で表したとき, 「2.7」までは確定で, 小数第 2 位は 1 か 2 である.

精度を高めるにはより大きい n を用いればよい. いずれにせよ, ようやく $e < 3$ であることがはっきりした.

例題 1-3. ネイピア数 e は無理数であることを示せ.

定義 9.3. 関数 $f(x)$ は点 a (あるいは点 0) を含む開区間 I 上で C^∞ 級とする. このとき, $f(x)$ は (T2) (あるいは (M2)) のように展開されるが, もし $n \to \infty$ のとき [剰余項] $\to 0$ なら, $f(x)$ は点 a (あるいは点 0) のまわりで

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{T3}$$

$$\left(\text{あるいは } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) \tag{M3}$$

とべき級数 (整級数) に展開される. これを $f(x)$ の**点 a におけるテイラー展開** (あるいは**マクローリン展開**) といい, 右辺の級数を**点 a におけるテイラー級数** (あるいは**マクローリン級数**) という.

例 2-1. 例 1-1 の剰余項は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する. 実際, 任意の実数 x に対して

$$\left| \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \right| = \frac{|x|^n}{n!} e^{\theta x} \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{\theta |x|} \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|} \xrightarrow{(n \to \infty)} 0 \cdot e^{|x|} = 0. \tag{16}$$

(注意: θ は n に依存する定数のため, θ の現れない式を作ってから $n \to \infty$ とする.) よって, 関数 $f(x) = e^x$ の点 0 におけるテイラー展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{17}$$

例 2-2 (階乗の逆数から成る級数の和). 式 (17) に $x = 1$ を代入すれば, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

演習問題

9-1. 以下の問いに答えよ.

(1) $\sin x$ の点 0 における剰余項を n 次とする有限テイラー展開を求めよ. 但し $n = 2m+1$ (奇数) とする.

(2) $\cos x$ の点 0 における剰余項を n 次とする有限テイラー展開を求めよ. 但し $n = 2m$ (偶数) とする.

(3) $\log x$ の点 1 における剰余項を n 次とする有限テイラー展開を求めよ.

9-2. 前問 (1), (2) の剰余項の極限を調べることで, 以下の等式が成り立つことを示せ.

(1) 任意の実数 x に対して $\displaystyle\sin x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1}$. ($\sin x$ の点 0 におけるテイラー展開)

(2) 任意の実数 x に対して $\displaystyle\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$. ($\cos x$ の点 0 におけるテイラー展開)

6 節から 9 節の追加問題

問 1. 関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x + 2\sqrt{1-x^2}$ の極値と, 最大値, 最小値を求めよ.

問 2. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の増減と極値を調べ, グラフの概形を描け. 最大値, 最小値も求めよ.

(2) $\pi^e < e^\pi$ であることを証明せよ. (hint: $f(\pi)$ を調べよ.)

問 3. $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$ とする. $f(x)$ は全区間 $(-\infty, \infty)$ で (特に点 0 で) 2 回微分可能であることを示せ. また, 3 回微分可能かどうか調べよ.

問 4. 関数 $x^3 e^{2x}$ の n 階導関数を求めよ.

問 5. 関数 $\sqrt{1+x}$ の点 0 における剰余項を 4 次とする有限テイラー展開を求めよ.

問 6. 演習問題 8-1 を利用し, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ の点 0 におけるテイラー展開の最初の数項を記せ.