10　べき級数 (整級数)

点 0 を中心とするべき級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{1}$$

べき級数 (1) の収束性は以下の 3 つの場合に限られることが知られている.

(A) 任意の $x \in (-\infty, \infty)$ に対して絶対収束する.
(B) ある $R \in \mathbb{R}$ が存在して, $|x| < R$ なる任意の x に対して絶対収束し $|x| > R$ なる任意の x に対して発散.
(C) $x = 0$ のときのみ収束し $x \neq 0$ のときは発散.

補注 1-1. 各項の絶対値を取った級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ が収束するとき, **絶対収束**という. べき級数が絶対収束するならば (普通の意味で) 収束する.

補注 1-2. (B) において, $|x| = R$, すなわち $x = \pm R$ のときの収束性は, べき級数によってまちまちである.

補注 1-3. (B) の実数 R を, そのべき級数の**収束半径**という. (A) のときは収束半径 ∞, (C) のときは収束半径 0 と約束する. このように, すべてのべき級数に収束半径と呼ばれる実数 (または ∞) を定めることにする.

補注 1-4. べき級数 (1) は, (A) または (B) のとき, その**収束域** ($(-\infty, \infty), (-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$ のいずれか) を定義域とし, 級数の和を値に取る実数値 1 変数関数とみなせる.

参考. 一般に, 点 a を中心とするべき級数は

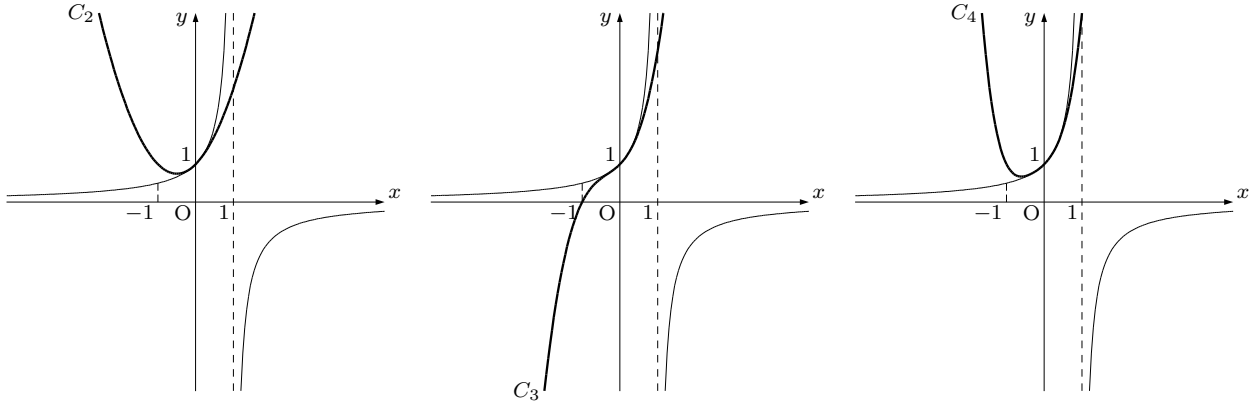
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots \tag{2}$$

で与えられる. べき級数 (2) の収束性は, (1) のときと同様, 以下の 3 つの場合に限られ, 収束半径も同様に定義される: (a) 任意の $x \in (-\infty, \infty)$ に対して絶対収束する. (b) ある $R \in \mathbb{R}$ が存在して, $|x-a| < R$ なる任意の x に対して絶対収束し $|x-a| > R$ なる任意の x に対して発散. (c) $x = a$ のときのみ収束し $x \neq a$ のときは発散. (参考終)

例 1. 高校で既習の「初項 1, 公比 x の等比級数 (幾何級数) の和」より

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ \text{発散}, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

が成り立つ. これは上の (B) に相当し, 収束半径は $R = 1$ である.
次のような見方も重要: 「有理関数 $1/(1-x)$ は, 開区間 $(-1, 1)$ において, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ に展開される.」
以下の図は, 曲線 $y = 1/(1-x)$ に m 次曲線 $C_m : y = \sum_{n=0}^{m} x^n$ $(m = 2, 3, 4)$ のグラフを重ね合わせたもの.



定理 10.1. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について, 極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \quad (\text{ダランベールの判定法}) \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = r \quad (\text{コーシーの判定法}) \tag{4}$$

が存在するとき $(0 \le r \le \infty)$, 収束半径は $R = 1/r$ である. ただし, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ と定める.

例 2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ について, ダランベールの判定法より $r = 1$ となるので, $R = 1$. すなわち, $|x| < 1$ のとき収束し $|x| > 1$ のとき発散する. 例 1 と異なり, $x = \pm 1$ のときはいずれの場合も収束する. 実際, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2 = -\pi^2/12$ となることが知られている.

例 3. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ について, ダランベールの判定法を用いると $r = 0$ となるので, $R = \infty$.

定理 10.2. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R ならば, 次のべき級数の収束半径も R である:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots. \tag{5}$$

定理 10.3 (項別微分)**.** べき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R ならば, $f(x)$ は $(-R, R)$ で微分可能で, その導関数 $f'(x)$ は次のべき級数と一致する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots. \tag{6}$$

例 4. 例 1 より $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は $R = 1$ であった. よって, $f(x)$ は $(-1, 1)$ で微分可能で

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \tag{7}$$

が成り立つ. 一方, 開区間 $(-1, 1)$ においては $f(x) = 1/(1-x)$ であるから, これを直接微分すると $f'(x) = 1/(1-x)^2$ となる. よって, 合わせると

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \qquad (x \in (-1, 1)) \tag{8}$$

が成り立つ. (関数 $1/(1-x)^2$ の点 0 のまわりのテイラー展開である)

系 10.4 (項別積分)**.** べき級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R ならば, 任意の $x \in (-R, R)$ に対して積分 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ は次のべき級数と一致する:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + \cdots. \tag{9}$$

例 5. 例 1 より $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は $R = 1$ であった. よって, 任意の $x \in (-1, 1)$ に対して

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \tag{10}$$

が成り立つ. 一方, 開区間 $(-1, 1)$ においては $f(x) = 1/(1-x)$ であるから, これを直接積分すると

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \big[-\log|1-t|\big]_{t=0}^{x} = -\log(1-x) \tag{11}$$

となる. よって, 合わせると

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots \qquad (x \in (-1, 1)) \tag{12}$$

が成り立つ. (関数 $\log(1-x)$ の点 0 のまわりのテイラー展開である)