11　積分の計算

例 1 (部分積分, 置換積分, 逆三角関数).

$$\int \mathrm{Sin}^{-1} x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

[$t = 1 - x^2$ とおくと $dt = -2x\,dx$]

$$= x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

例 2 (有理関数の積分).

(1)

$$\int \frac{1}{9x^2+16}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x^2+\frac{16}{9}}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\int \frac{\frac{4}{3}}{x^2+(\frac{4}{3})^2}\,dx = \frac{1}{12}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{\frac{4}{3}}\right) + C = \frac{1}{12}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + C$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{9x^2-16}\,dx &= \int \frac{1}{(3x-4)(3x+4)}\,dx = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{3x-4} - \frac{1}{3x+4}\right)dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\log|3x-4| - \frac{1}{3}\log|3x+4|\right) + C = \frac{1}{24}\log\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C\end{aligned}$$

(3)

$$\int \frac{x}{9x^2+16}\,dx = \frac{1}{18}\int \frac{18x}{9x^2+16}\,dx = \frac{1}{18}\int \frac{(9x^2+16)'}{9x^2+16}\,dx = \frac{1}{18}\log|9x^2+16| + C = \frac{1}{18}\log(9x^2+16) + C$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+7x^2-3}{x^2+x-2}\,dx &= \int\left(2x+5+\frac{-x+7}{x^2+x-2}\right)dx = \int\left(2x+5+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}\right)dx \\ &= x^2+5x+2\log|x-1| - 3\log|x+2| + C\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx &= \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x+4}{x^2+2x+5}\right)dx = \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x^2+2x+5}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2+2^2}\right)dx \\ &= -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+1}{2} + C\end{aligned}$$

例 3 ($\sin x$, $\cos x$ の有理関数の積分).

置換積分法による: $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ となり, さらに $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ となる.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

問題 11-1. 次の積分を求めよ. (1) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1} x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{20}{x^3-x^2+9x-9}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\,dx$

12　定積分の定義と微分積分学の基本定理

区間の分割. 閉区間 $[a,b]$ を考える. $x_0=a$, $x_n=b$ とし, a と b の間に $n-1$ 個の点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ を取ることを $[a,b]$ の n 分割といい

$$\Delta : a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b \tag{1}$$

と表す. 各 x_i を分割 Δ の分点という. 分割 Δ に対して

$$|\Delta|=\max\{x_i-x_{i-1}\,|\,1\le i\le n\}$$

とおき, これを分割 Δ の幅という.

分割の細分. Δ が (1) のような分割であるとき, Δ の分点の間にさらに分点を取って得られる分割を, Δ の細分という.

定積分の定義. 閉区間 $[a,b]$ 上定義された有界な関数 $f(x)$ に対して,

$$S(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\},$$
$$s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}),\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\}$$

とおく. $[a,b]$ の分割 Δ' が Δ の細分ならば

$$s(f,\Delta)\le s(f,\Delta')\le S(f,\Delta')\le S(f,\Delta) \tag{2}$$

が成り立つ. 分割 Δ を動かして

$$S(f)=\inf_{\Delta}\{S(f,\Delta)\},\quad s(f)=\sup_{\Delta}\{s(f,\Delta)\}$$

とおくと, (2) より $s(f)\le S(f)$ が成り立つ. (補注. Δ' が Δ_1 と Δ_2 の共通の細分なら, (2) より

$$s(f,\Delta_1)\le s(f,\Delta')\le S(f,\Delta')\le S(f,\Delta_2)$$

となるので, $s(f,\Delta_1)\le S(f,\Delta_2)$.)

さて, ここで $s(f)=S(f)$ が成り立つとき, f は閉区間 $[a,b]$ で**積分可能**であるという. この $s(f)=S(f)$ の値を, f の閉区間 $[a,b]$ における**定積分**といい, $\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す. すなわち,

$$\int_a^b f(x)\,dx=s(f)=S(f).$$

このように, 区間の分割を用いて定積分を定義することを, **区分求積法**という.

以上, $a<b$ であったが, $a>b$ のときには定積分を形式的に $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$ と定める. また, $\int_a^a f(x)\,dx=0$ と約束する.

定理 12.1. $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば, 積分可能である.

定理 12.2. $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で積分可能とする. $[a,b]$ の分割 Δ の小区間 $[x_{i-1},x_i]$ の中に任意の点 c_i を取るとき, 次の式が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

定理 12.3 (定積分の性質)**.** $f(x)$, $g(x)$ は関係する閉区間で積分可能とし, (i),(ii) では a, b, c の大小関係は問わない. このとき, 以下の等式が成り立つ.

(i) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad (\alpha, \beta$ は定数$)$.

(ii) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

(iii) $a < b$ とするとき, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(iv) $a < b$ とするとき, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(v) $a < b$ とするとき, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $|f(x)| \leq M$ ならば, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

定理 12.4 (積分の平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とする. このとき, ある $c \in (a, b)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{3}$$

定理 12.5 (微分積分学の基本定理)**.** 関数 $f(x)$ は区間 I で連続とする. $a \in I$ を積分の下端として固定し, 上端 x を変数として

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I \tag{4}$$

とおけば, $F(x)$ は I 上の関数となる (これを $f(x)$ の (下端 a の) **不定積分**という). このとき, $F(x)$ は I で微分可能で, $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, $x \in I$ が成り立つ.

原始関数. 区間 I 上の関数 $f(x)$ に対し, 微分可能な関数 $G(x)$ で I 上 $\frac{d}{dx}G(x) = f(x)$ となるものが存在するとき, $G(x)$ を I における $f(x)$ の原始関数という. (復習: もし $g'(x) = h'(x)$ なら, ある定数 C が存在して $g(x) = h(x) + C$.)

定理 12.6. 区間 I で連続な関数 $f(x)$ は I で原始関数をもつ. さらに, $a \in I$ とするとき $f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ は次のように表せる.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \quad C \text{ は実数}. \tag{5}$$

<u>証明</u>. 原始関数の存在性は定理 12.5 による. 実際, (4) の不定積分 $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のひとつである. 後半の主張は, $G'(x) = f(x) = F'(x)$ なので, ある定数 C が存在して $G(x) = F(x) + C$. □

定理 12.7 (微分積分学の基本公式)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とし, $G(x)$ は $f(x)$ の原始関数であるとする. このとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \tag{6}$$

が成り立つ. (注. $G(b) - G(a)$ は $[G(x)]_a^b$ と表す.)

<u>証明</u>. 定理 12.6 より $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$ と表せる. そのとき,

$$G(b) - G(a) = \left(\int_a^b f(t)\,dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + C\right) = \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

10 節から 12 節の確認問題・追加問題

問 1. 次のべき級数の収束半径 R を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$ (a は定数)

問 2. 関数 $1/(1-x)$ の点 0 におけるテイラー展開 (べき級数展開)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1)$$

を利用し, 次の関数のテイラー展開を求めよ. (hint: 項別微分, 項別積分)

(1) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

(2) $\log(1-x)$

問 3. 次の有理関数の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{4x^2+25}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{6x^2+x+19}{x^3+x^2+3x+3}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}\,dx$

問 4. 次の不定積分を求めよ.

$$\int\frac{1}{5+4\cos x}\,dx \quad (\text{hint: } t=\tan\tfrac{x}{2})$$

問 5. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$ (hint: 部分積分法)

(2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ (hint: $t=\sqrt[6]{x}$)