13　2 変数関数の極限と連続性

定義 13.1. 座標 (x, y) の点 P が座標 (a, b) の点 A に近づくことを $(x, y) \to (a, b)$ または $P \to A$ と書く．これは

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0 \qquad (2\text{ 点の距離が }0\text{ に近づく}) \tag{1}$$

と同じことである．

D を定義域とする 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D を通って定点 $\mathrm{A}(a, b)$ に限りなく近づくとき，その近づき方に関係なく $f(x, y)$ がある一定の値 ℓ に近づくならば，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell, \qquad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P}) = \ell \tag{2}$$

と表し，f は $\mathrm{P} \to \mathrm{A}$ のとき ℓ に**収束する**という．ℓ を**極限値**という．

定理 13.2. $\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P}) = \ell$, $\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} g(\mathrm{P}) = m$ のとき，

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} cf(\mathrm{P}) = c\ell, \quad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} \{f(\mathrm{P}) * g(\mathrm{P})\} = \ell * m \tag{3}$$

が成り立つ．ただし，c は定数，$*$ は四則演算のいずれか (商の場合は $g(\mathrm{P}) \neq 0$, $m \neq 0$ とする)．

定義 13.3. 関数 $f(\mathrm{P})$ とその定義域 D の 1 点 A について

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{A}) \tag{4}$$

が成り立つとき，$f(\mathrm{P})$ は点 A において**連続**であるという．また，D の任意の点において $f(\mathrm{P})$ が連続のとき，$f(\mathrm{P})$ は D において連続であるという．

定理 13.4. 関数 $f(\mathrm{P}), g(\mathrm{P})$ が点 A において連続のとき，

$$cf(\mathrm{P}), \quad f(\mathrm{P}) * g(\mathrm{P}) \tag{5}$$

も点 A において連続である．ただし，c は定数，$*$ は四則演算のいずれか (商の場合は $g(\mathrm{A}) \neq 0$ とする)．

定理 13.5. $z = f(x, y)$ が 2 変数関数として連続，$x = \varphi(t)$ と $y = \psi(t)$ が 1 変数関数として連続ならば，これらの合成 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ は t の 1 変数関数として連続である．

証明. $\lim_{t\to c} z = \lim_{t\to c} f(\varphi(t), \psi(t)) = \lim_{(x,y)\to(\varphi(c),\psi(c))} f(x, y) = f(\varphi(c), \psi(c))$. □

例 13.6. $f(x, y) = 2x + 3y$ のとき，$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (2x + 3y) = 8 = f(1, 2)$．$f$ は点 $(1, 2)$ で連続．

例 13.7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ は存在しない．実際，点 (x, y) を x 軸上の点 $(x, 0)$ に近づけてから点 $(0, 0)$ に近づけると，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

となり，点 (x, y) を y 軸上の点 $(0, y)$ に近づけてから点 $(0, 0)$ に近づけると，

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

となる．このように，原点への近づけ方によって値が異なるから，極限は存在しない．

14　偏導関数と高階偏導関数

定義 14.1. 2 変数関数 $z = f(x, y)$ において, y を定数とみて, x だけの関数と考えて x で微分可能ならば, z は x について**偏微分可能**であるといい, x で微分したものを

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\ \ z_x,\ \ f_x,\ \ f_x(x, y) \tag{6}$$

などど表す. 同様に, x を定数とみて y で微分したものを

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),\ \ z_y,\ \ f_y,\ \ f_y(x, y) \tag{7}$$

などと表す. これらを z の**偏導関数**という. 偏導関数を求めることを**偏微分する**という.

定義 14.2. $z = f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ が x, y について偏微分可能のとき, それらをさらに偏微分したものを考え,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{yy} \tag{11}$$

などと表し, z の **2 階偏導関数**という. 以下同様に 3 階以上の偏導関数も考えられる.

定義 14.3. $z = f(x, y)$ が偏微分可能で, 偏導関数 z_x, z_y がともに連続のとき, $f(x, y)$ は C^1 **級**であるという. 同様に, n 階偏導関数が存在してそれらがすべて連続のとき, C^n **級**という.

定理 14.4. $z = f(x, y)$ が C^2 級ならば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \qquad (z_{xy} = z_{yx}) \tag{12}$$

が成り立つ. また, C^n 級の場合も同様のことが成り立つ. 例えば, C^3 級ならば

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial y} \qquad (z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y} \qquad (z_{xyy} = z_{yxy} = z_{yyx}) \tag{14}$$

が成り立つ. その場合, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ のように表す.

例 14.5. $z = x^3 + 2xy + 4y^2$ の偏導関数は $z_x = 3x^2 + 2y$ と $z_y = 2x + 8y$ である. 2 階偏導関数は

$$z_{xx} = (z_x)_x = 6x, \quad z_{xy} = (z_x)_y = 2, \quad z_{yx} = (z_y)_x = 2, \quad z_{yy} = (z_y)_y = 8$$

である. (多項式関数は何度でも偏微分できるため C^∞ 級と考えられるが, 特に C^2 級でもある. 定理 14.4 の $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立っていることが確認される.)

15　2 変数関数の微分可能性と接平面

定理 15.1. $f(x,y)$ は点 (a,b) のまわりで定義された C^1 級関数とする．このとき，ある関数 $r(h,k)$ が存在して，以下の等式が成り立つ．

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+r(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{15}$$

Remark. 一般に，ある実数 A,B とある関数 $r(h,k)$ が存在して

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+Ah+Bk+r(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \tag{16}$$

が成り立つとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で**全微分可能 (微分可能)** であるという．このとき，$A=f_x(a,b)$，$B=f_y(a,b)$ になることや $f(x,y)$ が点 (a,b) で連続になることが示される．(証明略)

Remark. 定理 15.1 は「**C^1 級関数は必ず全微分可能になる**」ことを意味している．一般に逆は成り立たない．

Remark. 全微分可能の定義は必ずしも分かりやすいものではない．1 変数関数の微分可能性の類似と考えよ:
「関数 $f(x)$ が点 a で微分可能であるための必要十分条件は，ある実数 A とある関数 $\varepsilon(h)$ が存在して

$$f(a+h)=f(a)+Ah+\varepsilon(h),\quad \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0 \tag{17}$$

が成り立つことであり，そのとき $A=f'(a)$ である.」(資料 p.13, 定理 6.3)

Remark. 式 (15) において，(h,k) が $(0,0)$ に近いとき $r(h,k)$ はほぼ 0 であるから，$r(h,k)$ を無視すると，

$$f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\quad(\text{おおよそ等しい}) \tag{18}$$

と考えられる．右辺は h,k の 1 次式であるから，これを関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) の近くでの **1 次近似**という．

Remark. 式 (15) は，実は 2 変数関数のテイラー展開における 1 次の項までを具体的に書いたものである．$r(h,k)$ は 2 次剰余項に相当する．

定義 15.2. $f(x,y)$ は点 (a,b) を含む領域で C^1 級とする．このとき，方程式

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \tag{19}$$

で定まる空間内の平面を，曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における**接平面**という．

Remark. 1 次近似 (18) において，$x=a+h$, $y=b+k$ とおくと

$$f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\quad(\text{おおよそ等しい}) \tag{20}$$

となる．この右辺を z とおいたものが接平面 (19) である．

Remark. 座標空間内の任意の平面の方程式は $ax+by+cz=d$ (a,b,c,d は定数, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$) と表される．これを平面の方程式の一般形という．

例 15.3. $f(x,y)=x^3+2xy+4y^2$ の偏導関数は $f_x(x,y)=3x^2+2y$ と $f_y(x,y)=2x+8y$ である．
例えば，曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,f(1,2))$ における接平面は

$$\begin{aligned} z&=f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)\\ &=21+7(x-1)+18(y-2) \qquad\qquad \therefore z=7x+18y-22 \end{aligned}$$

16　合成関数の微分法

定理 16.1. $z = f(x, y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を微分可能な 1 変数関数とする.
このとき, 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ (t を変数とする 1 変数関数) は微分可能で, 導関数は以下のようになる.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (z' = z_x \cdot x' + z_y \cdot y'). \tag{21}$$

定理 16.2. $z = f(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ を C^1 級の 2 変数関数とする.
このとき, 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ (u, v を変数とする 2 変数関数) は偏微分可能で, 偏導関数は以下のようになる.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \qquad (z_u = z_x \cdot x_u + z_y \cdot y_u), \tag{22}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (z_v = z_x \cdot x_v + z_y \cdot y_v). \tag{23}$$

定義 16.3. 上の 2 式は次のように行列表示することもできる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad \text{あるいは} \qquad \begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}. \tag{24}$$

この式に現れる 2 次行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ を, 変数変換 $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ の**ヤコビ行列**という. また, その行列式を**ヤコビアン (ヤコビ行列式)** といい以下の記号で表す.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u. \tag{25}$$

例 16.4. $z = f(t^2, t^3)$ を t で微分したい. $x = t^2$, $y = t^3$ とおくと $z = f(x, y)$. よって, 定理 16.1 より

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= f_x(x, y) \cdot \frac{d}{dt}(t^2) + f_y(x, y) \cdot \frac{d}{dt}(t^3) \\ &= f_x(t^2, t^3) \cdot 2t + f_y(t^2, t^3) \cdot 3t^2. \end{aligned}$$

例 16.5. 1 次変換 $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ (a, b, c, d は定数) のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

例 16.6. 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

17　2 変数関数の平均値の定理・テイラーの定理

定理 17.1 (平均値の定理)**.** $f(x,y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする．$(a,b),(a+h,b+k)\in D$ とし，この 2 点を結ぶ線分が D に含まれているとする．このとき，ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次の等式が成り立つ:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k. \tag{26}$$

定理 17.2 (テイラー)**.** $f(x,y)$ を領域 D 上の C^n 級関数とする．$(a,b),(a+h,b+k)\in D$ とし，この 2 点を結ぶ線分が D に含まれているとする．このとき，ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ:

$$f(a+h,b+k)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left\{h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{\ell}f(a,b)+R_n, \tag{27}$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left\{h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{n}f(a+\theta h,b+\theta k). \tag{28}$$

Remark. 式 (27) の低次の項を具体的に書くと

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=f(a,b)&+\frac{1}{1!}\{f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\}\\&+\frac{1}{2!}\{f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2\}\\&+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(a,b)h^3+3f_{xxy}(a,b)h^2k+3f_{xyy}(a,b)hk^2+f_{yyy}(a,b)k^3\}+\cdots\end{aligned}$$

Remark. 定理 17.2 において $x=a+h$, $y=b+k$ とおくと，以下のように書くこともできる．

定理 17.3 (テイラー)**.** $f(x,y)$ を領域 D 上の C^n 級関数とする．$(a,b),(x,y)\in D$ とし，この 2 点を結ぶ線分が D に含まれているとする．このとき，ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ:

$$f(x,y)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\left\{(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{\ell}f(a,b)+R_n, \tag{29}$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left\{(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^{n}f(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)). \tag{30}$$

例 17.4. $f(x,y)=e^{x+y}$ の点 $(0,0)$ におけるテイラー展開を記述しよう．f の高階偏導関数はすべて e^{x+y} であるから，点 $(0,0)$ における高階偏微分係数はすべて $e^{0+0}=1$．これを

$$\begin{aligned}f(0+h,0+k)=f(0,0)&+\frac{1}{1!}\{f_x(0,0)h+f_y(0,0)k\}\\&+\frac{1}{2!}\{f_{xx}(0,0)h^2+2f_{xy}(0,0)hk+f_{yy}(0,0)k^2\}\\&+\frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0,0)h^3+3f_{xxy}(0,0)h^2k+3f_{xyy}(0,0)hk^2+f_{yyy}(0,0)k^3\}+\cdots\end{aligned}$$

に代入すると

$$e^{h+k}=1+\frac{1}{1!}\{h+k\}+\frac{1}{2!}\{h^2+2hk+k^2\}+\frac{1}{3!}\{h^3+3h^2k+3hk^2+k^3\}+\cdots$$

となる．

18　2 変数関数の極値問題

定義 18.1. $f(x,y)$ を点 (a,b) を含む領域で定義された 2 変数関数とする．点 (a,b) に十分近い任意の点 (x,y) に対して $f(x,y) \leq f(a,b)$ が成り立つとき, 関数 f は点 (a,b) において**極大**であるという．そのとき, $f(a,b)$ を**極大値**という．同様に「$f(x,y) \geq f(a,b)$」のとき, **極小, 極小値**という．

定理 18.2 (極値を取るための必要条件)**.** $f(x,y)$ を点 (a,b) を含む領域で偏微分可能な 2 変数関数とする．このとき, もし $f(x,y)$ が点 (a,b) において極値を取るならば $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つ．

Remark. 一般に逆は成り立たない．(例: 曲面上の**鞍点**)

定理 18.3 (極値の判定法)**.** $f(x,y)$ を点 (a,b) を含む領域で C^2 級な 2 変数関数とする．連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

に解 $(x,y) = (a,b)$ があるとする．(注: 定理 18.2 より, 点 (a,b) は極値を取る点の候補である．そのような点を**停留点**という.) ここで

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b), \quad C = f_{yy}(a,b) \tag{32}$$

とおき, $D = B^2 - AC$ とする．このとき, $f(x,y)$ は点 (a,b) において
(a) $D < 0$ ならば極値を取る．しかも $A > 0$ なら極小, $A < 0$ なら極大である．
(b) $D > 0$ ならば極値を取らない．

Remark. (a) において, $D < 0$ かつ $A = 0$ となることはない．実際, $D < 0$ は $B^2 < AC$ を意味するので, $A = 0$ だと矛盾が起きる．

Remark. $D = 0$ のときはこの判定法から結論を得ることはできない．

19　陰関数定理／条件付き極値問題

定理 19.1 (陰関数定理)**.** $f(x,y)$ は点 (x_0,y_0) の近くで C^1 級で, $f(x_0,y_0) = 0$ とする．このとき, $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ ならば, 以下の条件 (1)〜(3) を満たす関数 $\varphi(x)$ が一意的に存在する．

(1) $\varphi(x_0) = y_0$,　(2) $f(x,\varphi(x)) = 0$,　(3) $\varphi(x)$ は点 x_0 の近くで微分可能で $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$.

Remark. 定理 19.1 の意味: 「$f(x,y) = 0$ は $f_y \neq 0$ となる点の近くでは $y = \varphi(x)$ (φ は微分可能) と一意的に解ける.」

Remark. $\varphi(x)$ を具体的な式で表すことができるかどうかは別問題．ただし, 導関数の公式は (3) で与えられる．

定理 19.2 (ラグランジュの未定係数法)**.** $f(x,y), g(x,y)$ は C^1 級とする．このとき, 条件 $g(x,y) = 0$ の下で $f(x,y)$ が極値を取る点の候補 (停留点) は, 次の連立方程式を解くことで得られる:

$$\begin{cases} f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{33}$$