0　用語と記号

0.1　用語

- **定義** (Definition, 略 Def.), **定義する** (define)
  新出の言葉や記号などに (数学的な) 意味を定めること.
- **命題** (Proposition, 略 Prop.)
  次のように二通りの意味がある.
  (1) 正しい (**真**) か正しくない (**偽**) かが定まる文章や式のこと.
  　例.「任意の実数 x に対して, x より大きい実数 y が存在する」は真の命題.
  　例.「任意の実数 x に対して, $xy = 1$ となる実数 y が存在する」は偽の命題.
  (2) 上の (1) における真の命題のこと.
  <u>以下, 単に命題といったら, 真の命題を意味するものとする.</u>
- **公理** (Axiom)
  明らかに正しいとして認められた命題のこと. 自明な真理. そのほかの命題を導き出すための前提として導入される最も基本的な仮定.
  公理の例.
  i) 2 つの点が与えられたとき, その 2 点を通る直線を引くことができる. (ユークリッド幾何学)
  ii) $a = b$ ならば $a + c = b + c$ である. (ユークリッド原論より)
  iii) どんな自然数に対しても, その数の「次の」自然数が存在する. (ペアノの公理)
- **証明** (Proof)
  定義や公理, あるいは既知の命題を仮定として, ある命題が正しいことを論理的に導くこと. 論証.
- **定理** (Theorem, 略 Thm.)
  命題のうち特に重要度が高いもの.
  (ピタゴラスの定理, 三角関数の加法定理, 平均値の定理, などのように名前が付いているものから, 特に名前が付いていないものまで様々である.)
- **補題** (Lemma, 略 Lem.)
  定理や命題を証明する際に導入される補助的な命題のこと. 補助定理ともいう.
- **系** (Corollary, 略 Cor.)
  定理や命題の直接の帰結として得られる命題のこと.

0.2　数の集合の記号

- 自然数全体の集合: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$　(Natural numbers)　※ 0 を含める流儀もある.
- 整数全体の集合: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$　(Integers, 独 Zahlen)
- 有理数全体の集合: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$　(Rational numbers ＝比の数, Quotients ＝商)
- 実数全体の集合: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$ 無理数全体 $\}$　(Real numbers)
- 複素数全体の集合: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$　(Complex numbers)

包含関係: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

0.3　ギリシャ文字

A, α	alpha アルファ	I, ι	iota イオタ	P, ρ	rho ロー
B, β	beta ベータ	K, κ	kappa カッパ	Σ, σ	sigma シグマ
Γ, γ	gamma ガンマ	Λ, λ	lambda ラムダ	T, τ	tau タウ
Δ, δ	delta デルタ	M, μ	mu ミュー	Υ, υ	upsilon ウプシロン
E, ϵ, ε	epsilon イプシロン	N, ν	nu ニュー	Φ, ϕ, φ	phi ファイ
Z, ζ	zeta ゼータ	Ξ, ξ	xi クサイ	X, χ	chi カイ
H, η	eta エータ	O, o	omicron オミクロン	Ψ, ψ	psi プサイ
Θ, θ	theta シータ, テータ	Π, π	pi パイ	Ω, ω	omega オメガ

0.4　論理記号

$\therefore$	ゆえに, therefore	s.t. $\sim$	$\sim$のような, such that
$\because$	なぜならば, because	$\vee$	または, or
$\exists$	存在する, exist (**存在記号**)	$\wedge$	かつ, and
$\exists!$, $\exists 1$	一意的に存在する	$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$	左辺を右辺で定義する
$\forall$	任意の, any, arbitrary (**全称記号**)	$:=$	左辺を右辺で定義する
$\Rightarrow$	ならば, then	$\Leftrightarrow$	同値, 必要十分, if and only if

例. 論理記号を用いて表された命題を考える:

$$\text{命題 P}: \quad \exists x \in \mathbb{R} \ \ (x^2 = -1).$$

これは「$\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x^2 = -1$」と表しても同義である. 言葉で表すと

「There exists $x \in \mathbb{R}$ such that $x^2 = -1$.」(ある実数 x が存在して $x^2 = -1$ となる.)

という意味であり, 明らかに P は偽の命題である.

さて, ここで P の否定命題 $\bar{\mathrm{P}}$ を考えよう. どんな実数も条件 $x^2 = -1$ を満たさない, という意味の文を作ればいいから, P の否定文は

「For any $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$.」(任意の実数 x に対して $x^2 \neq -1$ となる.)

であり, 論理記号を用いると

$$\text{命題 } \bar{\mathrm{P}}: \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ (x^2 \neq -1).$$

となる. $\bar{\mathrm{P}}$ は真の命題である.

練習問題. 以下の二つの命題を言葉で表し, 違いを考察せよ. また, 否定命題および真偽も調べよ.

$$\text{命題 Q: } \forall x \in \mathbb{R} \ \ (\exists y \in \mathbb{R} \ \ (x \leq y)), \qquad \text{命題 R: } \exists y \in \mathbb{R} \ \ (\forall x \in \mathbb{R} \ \ (x \leq y))$$