1　2 重積分

2 重積分の概念と定義.
授業で説明する (区分求積法によって定義する).

定理 1.1
関数 $f(x, y)$ が閉領域 D 上連続ならば $f(x, y)$ は D 上 2 重積分可能である.

定理 1.2
閉領域 D 上 2 重積分可能な関数 $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$ に対して, 次が成り立つ.
(1) [線形性] λ, μ が定数のとき,

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f\,dx\,dy + \mu \iint_D g\,dx\,dy.$$

(2) [加法性] D がふたつの閉領域 D_1, D_2 に分割されるとき,

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy.$$

(3) [単調性] D 上で常に $f \leq g$ のとき,

$$\iint_D f\,dx\,dy \leq \iint_D g\,dx\,dy.$$

(4) $|f|$ も D 上 2 重積分可能で,

$$\left| \iint_D f\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f|\,dx\,dy.$$

定理 1.3 (累次積分, repeated integral)
(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ とする. ただし, a, b は定数, $\varphi(x), \psi(x)$ は連続関数.
このとき, 関数 $f(x, y)$ が閉領域 D 上連続ならば, f の D 上の 2 重積分は以下の右辺のように計算される:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$ とする. ただし, c, d は定数, $\alpha(y), \beta(y)$ は連続関数.
このとき, 関数 $f(x, y)$ が閉領域 D 上連続ならば, f の D 上の 2 重積分は以下の右辺のように計算される:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

補注. (1) の閉領域 D を**縦線領域**, (2) の D を**横線領域**と呼称することがある.

補注. (1) および (2) の右辺の積分をそれぞれ次のように表すこともある.

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy, \qquad \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx.$$

演習問題

1-1. 積分領域 D を図示し, 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \iint_D (x+y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$

(2) $I = \iint_D (x^2+xy+y^2)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3\}$

(3) $I = \iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

(4) $I = \iint_D e^x \sin(2y)\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 1,\ \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

1-2. 積分領域 D を図示し, 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \iint_D x^3 y\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

(2) $I = \iint_D (1-x-y)^2\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

(3) $I = \iint_D x\,dx\,dy$
ただし, $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1-3. xyz 空間における次の領域の体積を求めよ.
曲面 $z = 9x^2 + 4y^2$ の下で頂点 $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(2,3,0)$, $(0,3,0)$ の長方形の上の領域.

2　2重積分における変数変換

定理 2.1（定積分における変数変換 (置換積分)）

t 軸上の閉区間 $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ が微分可能な変数変換 $x = g(t)$ によって x 軸の区間 I の中に写され,

$$g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b \quad (a, b \in I) \tag{1}$$

とする. このとき, I で定義された連続関数 $f(x)$ に対して次が成り立つ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt. \tag{2}$$

特に g が (強い意味の) 単調関数なら, $A = \min\{a, b\}$, $B = \max\{a, b\}$ とおくことで

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot |g'(t)|\,dt. \tag{3}$$

定理 2.2（2 重積分における変数変換）

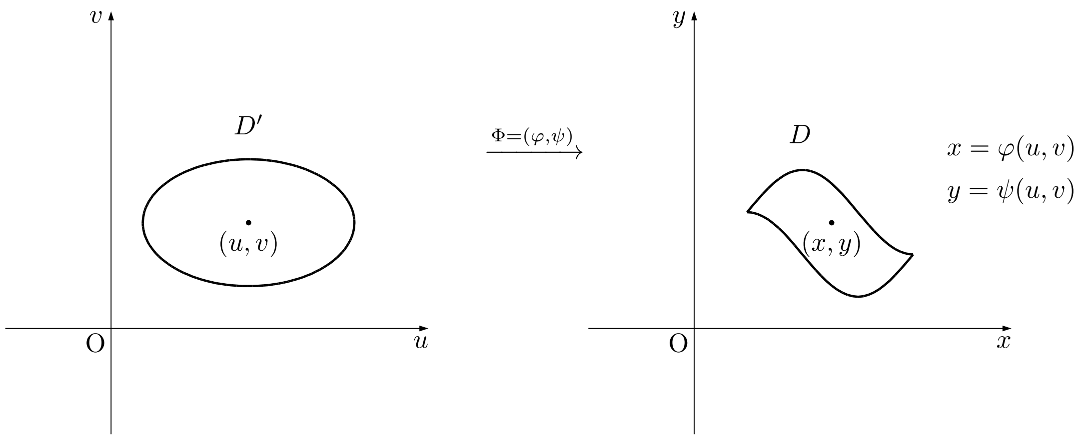
D を xy 平面上の有界閉領域, D' を uv 平面の有界閉領域とする. $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ により D' から D への変換 $\Phi = (\varphi, \psi)$ が与えられており, この対応は 1 対 1 で, φ, ψ は u, v に関して連続な偏導関数をもち (すなわち, φ, ψ は C^1 級), ヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = x_u y_v - x_v y_u \tag{4}$$

が D' 上で 0 にならないとする. このとき, D 上の連続関数 $f(x, y)$ に対して次の公式が成り立つ:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \tag{5}$$

(図)



補注. D' と D の対応が 1 対 1 でなくても, またヤコビアンが 0 となる点があっても, そのような点の集合の面積が 0 であるならば, (**??**) は成り立つ. (例えば, 極座標変換を用いる場面でしばしば起こり得る.)

演習問題

2-1. 次の 2 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \cos(x^2)\, dx$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$

2-2. 次の積分の順序を変更せよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{1} dx \int_x^{2x} f(x,y)\, dy$

2-3. 変数変換を用いて, 2 重積分 I を計算せよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)e^{x-y}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x-y \le 1,\ 0 \le x+y \le 1\}$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (x+y)^2 \sin(x-y)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x+y \le \pi,\ 0 \le x-y \le \pi\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}, \qquad \text{hint: } u = x+y,\ v = \frac{y}{x}$

2-4. 変数変換を用いて, 2 重積分 I を計算せよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le a^2\}\ (a > 0)$

(2) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^3\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$

(3) $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le x\}$

(4) $I = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \,|\, \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \le 1\}\ (a > 0,\ b > 0)$

2-5. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ とする. また, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0,\ y \ge 0\}$ とおき, 任意の自然数 n に対して $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le n^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ と定める.

(1) $D_n \subset D$ であること, および $D_n \subset D_{n+1}$ であることを, 図を描いて確認せよ.

(2) $I_n = \displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)\, dx\, dy$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

補注. これは無限領域 D に対する**広義 2 重積分** $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$ の計算法の一例である ((3) の値がこの積分の値となる). $\{D_n\}$ は無限領域 D の**近似増加列**と呼ばれる.

3　3 重積分

3 重積分の定義. (2 重積分の区分求積法と同様)
V: 空間内の閉領域,　$f = f(x, y, z)$: V 上定義された 3 変数関数.

$$I_\Delta = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})(a_i - a_{i-1})(b_j - b_{j-1})(c_k - c_{k-1}) \tag{6}$$

$$\longrightarrow I = \iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{7}$$

定理 3.1
関数 $f(x, y, z)$ が V 上連続ならば $f(x, y, z)$ は V 上 3 重積分可能である.

定理 3.2
(1)～(4) (線形性, 加法性, 単調性等は 2 重積分のときと同様に成り立つ.)

定理 3.3（累次積分）
$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$, ただし, D は xy 平面上の閉領域.
このとき, V 上の連続関数 $f(x, y, z)$ に対して

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right\} dx\,dy. \tag{8}$$

補注. 右辺の積分を次のように表すこともある:

$$\iint_D dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

演習問題

3-1. 次の 3 重積分 I を求めよ.

(1) $I = \iiint_V e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$,　$V = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$

(2) $I = \iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$,　$V = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$

(3) $I = \iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$,　$V = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

(4) $I = \iiint_V y\,dx\,dy\,dz$,　$V = \{(x, y, z) \,|\, x + 2y + 3z \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

4　3重積分における変数変換／重積分の応用

定理 4.1（3 重積分における変数変換）

V: xyz 空間内の閉領域, V': uvw 空間内の閉領域.
$x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \xi(u,v,w)$ により, $\Phi : V' \to V; (u,v,w) \mapsto (x,y,z)$. (1 対 1 の変換)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \quad (\text{ヤコビアンは } V' \text{ 上で } \neq 0 \text{ とする}) \tag{10}$$

このとき,

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \xi(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw. \tag{11}$$

空間の変数変換の例.

1. 空間の極座標 (球座標). (r,θ,φ)
r は原点からの距離, θ は天頂角, φ は方位角. 空間の点 (x,y,z) との変換式は

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{12}$$

となる. この変換のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ となる.

2. 円柱座標. (r,θ,z)
r, θ は平面上の極座標変換と同じ. 空間の点 (x,y,z) との変換式は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z \tag{13}$$

となる. この変換のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$ となる.

面積・体積の計算.

1. 平面上の閉領域の面積.
xy 平面上の閉領域 D の面積 $|D|$ は以下の 2 重積分で与えられる:

$$|D| = \iint_D dx\,dy \tag{14}$$

2. 空間内の閉領域の体積.
xyz 空間内の閉領域 V の体積 $|V|$ は以下の 3 重積分で与えられる:

$$|V| = \iiint_V dx\,dy\,dz \tag{15}$$

演習問題

4-1. 空間の極座標について

(1) $(r,\theta,\varphi) = (3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ に対応する点 (x,y,z) を求めよ.

(2) $(x,y,z) = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2})$ に対応する点 (r,θ,φ) を求めよ. ただし, $0 \leq r,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$ とする.

4-2. 円柱座標について

(1) $(r,\theta,z) = (2, \frac{2}{3}\pi, -1)$ に対応する点 (x,y,z) を求めよ.

(2) $(x,y,z) = (-2\sqrt{3}, -2, 5)$ に対応する点 (r,θ,z) を求めよ. ただし, $0 \leq r,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(3) 円柱座標による変数変換でヤコビアンが $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$ となることを確かめよ.

4-3. 空間の極座標を用いて, 次の 3 重積分を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad V = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ (a は正の定数)

(2) $I = \displaystyle\iiint_V xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad V = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

4-4. 半径が a の球の体積を求めよ. (3 重積分を使え)

4-5. 次の 2 つの図形の共通部分 V の体積を求めよ. (3 重積分を使え)

(1) 半径 a の球: $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ と円柱: $x^2+y^2 \leq ax$

(2) 円柱: $x^2+y^2 \leq a^2$ と円柱: $y^2+z^2 \leq a^2$