5 線形代数学からの準備

5.1 ベクトルの内積

定義 5.1 (n 次元ベクトルの演算)
n を 1 以上の整数とする. 実数を成分とする n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

に対して, 次のように各演算を定義する: 加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+a_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$, スカラー倍 $k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$ (ただし, $k \in \mathbb{R}$),
内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

定義 5.2 (長さの定義)
上記の $\boldsymbol{a}$ に対して, ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを次のように定める.

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \tag{2}$$

命題 5.3 (内積の性質)
内積は次をみたす.

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = ||\boldsymbol{a}||^2 \geq 0$ (等号成立は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る)
(ii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交換法則)
(iii) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})$ (ただし, $k \in \mathbb{R}$)
(iv) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (分配法則)

【証明】内積の定義に従って計算すれば示せるので, 読者の練習とする. □

命題 5.4
内積とベクトルの長さについて, 次の不等式が成り立つ.

(i) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||$ (コーシー・シュワルツの不等式)
(ii) $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}||$ (三角不等式)

【証明】(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 命題 5.3 より

$$0 \leq ||t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 = (t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = t^2||\boldsymbol{a}||^2 + 2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + ||\boldsymbol{b}||^2 \tag{3}$$

が成り立つ. よって, 上の t の 2 次式は判別式が 0 または負となるから

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 \leq 0 \tag{4}$$

となり, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||$ を得る.

(ii) 両辺とも非負なので, 2 乗して比較すれば十分.

$$(||\boldsymbol{a}||+||\boldsymbol{b}||)^2-||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2=||\boldsymbol{a}||^2+2||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||+||\boldsymbol{b}||^2-(||\boldsymbol{a}||^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+||\boldsymbol{b}||^2) \tag{5}$$
$$=2(||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\geq 0. \tag{6}$$

ここで, 最後の不等号は (i) による. よって, $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2\leq(||\boldsymbol{a}||+||\boldsymbol{b}||)^2$ となり, 目的の不等式を得る. □

補注. (i) は, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を式 (1) のように成分表示すれば, 以下と同値:

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2). \tag{7}$$

(ii) は, 長さの基本的な性質「三角形の 1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さい」に相当する不等式である.

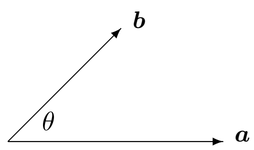
練習 5.5 命題 5.4 の (i) において, 等号成立は「$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$」または「$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$」または「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍」のときに限ることを示せ. また (ii) において, 等号成立は「$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$」または「$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$」または「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の正の実数倍」のときに限ることを示せ.

定義 5.6 (角の定義)

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ なる任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||} \tag{8}$$

を満たす実数 θ (ただし, $0\leq\theta\leq\pi$) を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす**角**という.



補注. 与えられた $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対し, そのような θ はただひとつに定まる. 実際, シュワルツの不等式より

$$-||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\leq\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leq||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}|| \tag{9}$$
$$\therefore -1\leq\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||}\leq 1\quad(\leftarrow\text{余弦関数の値域に含まれる}) \tag{10}$$

補注. 2 次元 (または 3 次元) ベクトルの場合は, $||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\cos\theta$ と $a_1b_1+a_2b_2$ (または $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$) が等しいことは, 余弦定理を用いることで幾何的に証明される.

定義 5.7 (ベクトルの直交)

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ なる n 次元ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ を満たすとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という.

例 5.8 4 次元ベクトル $\boldsymbol{a}={}^t\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}={}^t\begin{bmatrix}2&1&4&-1\end{bmatrix}$ について,

$$||\boldsymbol{a}||=2,\quad ||\boldsymbol{b}||=\sqrt{22},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{11}$$

である. 内積が 0 なので, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する.

練習 5.9 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}={}^t\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}={}^t\begin{bmatrix}-1&-1&\sqrt{2}\end{bmatrix}$ のなす角 θ を求めよ (ただし, $0\leq\theta\leq\pi$).

命題 5.10

ふたつのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \tag{12}$$

で与えられる. 特に, 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の場合は

$$S = |\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}| = |a_1b_2 - a_2b_1| \tag{13}$$

となる (2 次行列式の絶対値).

【<u>証明</u>】$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする. $\boldsymbol{a}$ を底辺とみると, 高さは $||\boldsymbol{b}||\sin\theta$ であるから

$$S = ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\sin\theta \tag{14}$$

と表せる. よって,

$$S^2 = ||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2\sin^2\theta = ||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2(1-\cos^2\theta) \tag{15}$$

$$= ||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2\left(1 - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2}\right) = ||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \tag{16}$$

となる. 後半 (2 次元ベクトルの場合) は根号の中を計算すれば証明できるので, 読者の練習とする. □

練習 5.11 命題 5.10 の後半を証明せよ.

命題 5.12

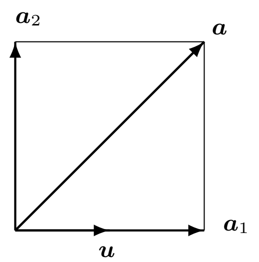
$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ正の向き (反時計回りの向き) にはかった角を φ とする. このとき, $0 \le \varphi \le \pi$ ならば $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix} \ge 0$ である. 一方, $\pi \le \varphi \le 2\pi$ ならば $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix} \le 0$ である.

【<u>証明</u>】$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の位置関係だけが関係するので, 必要なら座標軸を回転させることにより, $\boldsymbol{a}$ が x 軸上で正の方向にあるとして良い. そこで $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(a_1 > 0)$ とする. このとき, $0 \le \varphi \le \pi$ ならば $b_2 \ge 0$ となるので $\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 \ge 0$. 一方, $\pi \le \varphi \le 2\pi$ ならば $b_2 \le 0$ となるので $\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 \le 0$. □

練習 5.13 $\boldsymbol{u}$ を 2 次元または 3 次元のベクトルとする ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$). 与えられた任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を, $\boldsymbol{u}$ と向きが同じまたは逆のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と, $\boldsymbol{u}$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の和に分解することを考える. すなわち, 実数 c を用いて

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_1 = c\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{u} = 0. \tag{17}$$

$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への**正射影**とよぶ. このとき, $\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$ (すなわち, $c = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$) となることを示せ.



練習 5.14 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ の $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向への正射影を求めよ．また $\boldsymbol{u}$ と垂直な方向の成分 (上の $\boldsymbol{a}_2$) を求めよ．さらに, $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ に取り替えて同じ質問に答えよ.

例 5.15 質点が一定の力 $\boldsymbol{F}$ を受けながら一直線上を $\boldsymbol{s}$ だけ変位したとする．このとき, $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{s}$ の内積

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} \tag{18}$$

を力 $\boldsymbol{F}$ のした**仕事**という．仕事は, 動いた方向の力の成分 $||\boldsymbol{F}|| \cos\theta$ (θ は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{s}$ のなす角) と変位ベクトルの大きさ $||\boldsymbol{s}||$ の積である．仕事の単位はジュール [J] である．1[J] は, 1[N] の力で 1[m] 変位したときの仕事である.

5.2　空間ベクトルの外積

この節では xyz 空間内のベクトルを考える．座標系は右手系とする.

定義 5.16 (3 次元ベクトルの外積)
実数を成分とする 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次のように定義する:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \tag{20}$$

練習 5.17 基本ベクトル $\boldsymbol{i} = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{k} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \tag{21}$$

が成り立つ．これを確かめよ.

補注. 任意の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ は基本ベクトルの 1 次結合として $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ と表すことができる．書物によってはこのような表記法もよく使われる.

練習 5.18 外積は形式的に次のように表せることを示せ. (ヒント: 右辺の 3 次行列式を形式的に計算せよ)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{j} & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{22}$$

命題 5.19 (外積の性質)
外積は次を満たす.

(i) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

(iii) $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b})$　(ただし, $k \in \mathbb{R}$)

(iv) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$　(分配法則)

【<u>証明</u>】直接計算または行列式の性質を用いて示せるので, 読者の練習とする. □

補注. (iii) のベクトルは単に $k\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表す. (ii) の右辺も単に $-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ と表す.

命題 5.20

3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の内積と外積に関して

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} \quad (3\text{ 次行列式}) \tag{23}$$

が成り立つ. (これを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の**スカラー 3 重積**または**混合 3 重積**という.)

【<u>証明</u>】$\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = {}^t\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$ とする. 右辺の行列式を第 1 列で余因子展開することで

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} \tag{24}$$

$$= a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{25}$$

を得る. 同様に, 第 3 列で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} \tag{26}$$

$$= c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{27}$$

を得る. □

定理 5.21（外積の幾何的性質）

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は次を満たす.

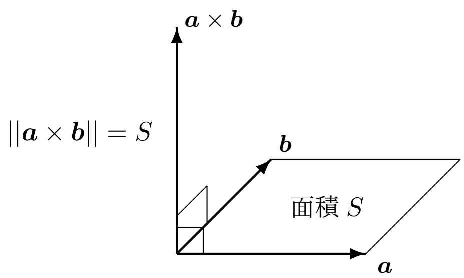
(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する.

(ii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さは

$$||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|| = \sqrt{||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} = ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||\sin\theta \tag{28}$$

となる (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角). すなわち, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しい.

(iii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回したときの進行方向である.



【<u>証明</u>】(i) 内積が 0 になることを示せばよい. 行列式の値は二つの列が同じ場合は 0 になるので,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\end{vmatrix} = 0, \qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

となる．

(ii) 計算によって，

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 &(30)\\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 &(31)\\ &= ||\boldsymbol{a}||^2\,||\boldsymbol{b}||^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 &(32)\end{aligned}$$

となる．命題 5.10 よりこれは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積 S の 2 乗である．

(iii) 座標軸を回転させることで，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が xy 平面にある場合だけ考えれば良い．$\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = {}^t\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0\end{bmatrix}$ とすると，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{bmatrix} \tag{33}$$

となる．これは z 軸上のベクトルだから，z 成分の正負によって $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きが決まる．命題 5.12 より，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ への正の向きの角 φ が $0\leq\varphi\leq\pi$ なら，z 成分は正．すなわち，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は z 軸の正の方向を向く．これは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじを回したときの進行方向になっている．$\pi\leq\varphi\leq 2\pi$ のときも同様である． □

演習問題

5-1. $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = {}^t\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ とする．次を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(3) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(4) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$

(6) 3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(2,0,1)$, $\mathrm{B}(0,1,1)$ を頂点とする三角形の面積

(7) 3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(2,0,1)$, $\mathrm{B}(0,1,1)$ を通る平面の方程式 (外積を利用すること)

(8) 3 点 $\mathrm{A}(2,0,1)$, $\mathrm{B}(0,1,1)$, $\mathrm{C}(-2,3,1)$ を通る平面の方程式 (外積を利用すること)

5-2. 空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積は，スカラー 3 重積 (命題 5.20 参照) の絶対値で与えられることを示せ．