6　ベクトル関数の微分法

※扱うベクトルはすべて 3 次元ベクトルとする.

定義 6.1

ベクトルの無限列 $\{\boldsymbol{a}_n = {}^t\begin{bmatrix} a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \end{bmatrix}\}_{n\geq 1}$ はベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ に**収束する**.

$\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}|| = 0.$

$\iff$ 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = a_i$ が成り立つ.

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ と表す.

例 6.2 $\boldsymbol{a}_n = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{1}{n} & 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n & \dfrac{2n^2+3}{n^2+n} \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{a}_n$ は $n \to \infty$ のとき $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ に収束する.

定義 6.3

ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} r_1(t) & r_2(t) & r_3(t) \end{bmatrix}$ は $t \to t_0$ のときベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ に**収束する**.

$\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{t\to t_0} ||\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|| = 0.$

$\iff$ 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to t_0} r_i(t) = a_i$ が成り立つ.

このとき, $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$ と表す.

定義 6.4

ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} r_1(t) & r_2(t) & r_3(t) \end{bmatrix}$ は $t = t_0$ で**連続**.

$\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0).$

$\iff$ 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to t_0} r_i(t) = r_i(t_0)$ が成り立つ. (即ち, 各 $r_i(t)$ は $t = t_0$ で連続)

例 6.5 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{t^2-1}{t-1} & \sinh t & t^2 \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{r}(t)$ は $t \to 1$ のとき $\boldsymbol{a} = {}^t\begin{bmatrix} 2 & \sinh 1 & 1 \end{bmatrix}$ に収束する. 一方で, $\boldsymbol{r}(t)$ の第 1 成分 $(t^2-1)/(t-1)$ は $t = 1$ で不連続なので, $\boldsymbol{r}(t)$ は $t = 1$ で不連続なベクトル関数である.

定義 6.6

ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} r_1(t) & r_2(t) & r_3(t) \end{bmatrix}$ は $t = t_0$ で**微分可能**.

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)\}$ が存在する. (これを**微分係数**と称し, $\boldsymbol{r}'(t_0)$ や $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t_0)$ で表す.)

$\iff$ 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して極限値 $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\{r_i(t_0 + \Delta t) - r_i(t_0)\}$ が存在する. (即ち, 各 $r_i(t)$ は $t = t_0$ で微分可能)

例 6.7 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} |t| & \sinh t & t^2 \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{r}(t)$ は $t = 0$ で連続であるが, 微分可能ではない.

定義 6.8

ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ は区間 I で**連続** (または**微分可能**).

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $t_0 \in I$ に対して, $\boldsymbol{r}(t)$ は $t = t_0$ で連続 (または微分可能).

$\boldsymbol{r}(t)$ が区間 I で微分可能のとき, 通常の 1 変数関数の場合と同様に $\boldsymbol{r}(t)$ の**導関数**が定義され, $\boldsymbol{r}'(t)$ や $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ などと表す. また, n **階導関数**も通常の場合と同様に定義され, $\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$ や $\dfrac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ などと表す.

例 6.9 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[\log t \quad \sinh t \quad t^2\Big]$ は区間 $(0, \infty)$ で 2 回微分可能で,

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = {}^t\left[\frac{1}{t} \quad \cosh t \quad 2t\right], \quad \boldsymbol{r}''(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = {}^t\left[-\frac{1}{t^2} \quad \sinh t \quad 2\right].$$

補注. 多変数ベクトル関数についても同様の定義が行える. 例えば 2 変数ベクトル関数

$$\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\big[r_1(u, v) \quad r_2(u, v) \quad r_3(u, v)\big]$$

については, 連続性に加えて, 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$, 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial v\partial u}, \dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u\partial v}, \dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial v^2}$ 等を考えることができる. これらはそれぞれ $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vu}, \boldsymbol{r}_{vv}$ 等とも表す.

演習問題

6-1. 次の 1 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ の導関数 $\boldsymbol{r}'(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ および 2 階導関数 $\boldsymbol{r}''(t) = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[2\cos t \quad 2\sin t^2 \quad t^3\Big]$ (2) $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[\cosh t \quad \sinh t \quad 0\Big]$

6-2. 次の 2 変数ベクトル関数の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\Big[uv^2 + 2v \quad e^{uv} \quad \sin(3u - v)\Big]$ (2) $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\Big[\frac{1}{2}\log(u^2 + v^2) \quad \mathrm{Tan}^{-1}\frac{v}{u} \quad 0\Big]$

6-3. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t)$ を微分可能な 1 変数ベクトル関数とする. 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v})' = \lambda\boldsymbol{u}' + \mu\boldsymbol{v}'$ (λ, μ は定数)

(2) $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'$

(3) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}'$

(4) $(f(t)\boldsymbol{v})' = f(t)\boldsymbol{v}' + f'(t)\boldsymbol{v}$

(5) $\{\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\}' = \boldsymbol{u}' \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}')$

6-4. $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\Big[r_1(t) \quad r_2(t) \quad r_3(t)\Big]$, $t = t(u)$ のとき $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{du} = \dfrac{dt}{du}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が成り立つことを示せ.

7　曲線とベクトル関数／曲線の長さ

7.1 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とし, ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$ を考える. このとき, $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ は一般に空間内の曲線を表す. この表示は t を変数とする曲線のパラメータ表示 (媒介変数表示) に他ならない. t が増加したときに進む方向を C の**向き**と定める.

例 7.2 $L : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x_0 + at & y_0 + bt & z_0 + ct \end{bmatrix}$ とする (x_0, y_0, z_0, a, b, c は定数). もし $\boldsymbol{v} = {}^t\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ ならば L は空間内の直線を表す. 明確には, L は点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通りベクトル $\boldsymbol{v}$ に平行な直線である. L の向きは $\boldsymbol{v}$ の向きと同じである.

このように $\boldsymbol{v}$ は L の方向を定めるが, 一般にそのようなベクトルを直線の**方向ベクトル**という. L の方向ベクトルのうち, 特に長さが 1 のものを**単位方向ベクトル**という.

注意: もし $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ならば L は 1 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を表すのみとなる.

練習 7.3 a, c を正の定数とする. $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos t & a\sin t & ct \end{bmatrix}$ は空間内のどのような曲線を表すか.

定義 7.4 (接ベクトルと接線)

$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を曲線とし, $\boldsymbol{r}(t)$ は微分可能とする. $\boldsymbol{r}(t)$ の $t = t_0$ における微分係数

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)\} \tag{1}$$

が $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$ とする. また, $t = t_0$ のときの C 上の点を P_0 とする (P_0 の座標は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0)$ によって計算される). このとき, $\boldsymbol{r}'(t_0)$ を曲線 C の $t = t_0$ における (あるいは点 P_0 における) **接ベクトル**という. 特に, 長さを 1 に正規化したベクトル

$$\boldsymbol{u}(t_0) = \frac{1}{||\boldsymbol{r}'(t_0)||}\boldsymbol{r}'(t_0) \tag{2}$$

を**単位接ベクトル**という. さらに, 点 P_0 を通り $\boldsymbol{r}'(t_0)$ あるいは $\boldsymbol{u}(t_0)$ に平行な直線 L_{t_0} を曲線 C の $t = t_0$ における**接線**という. 点 P_0 における接線という意味で L_{P_0} と書くこともある.
接線 L_{t_0} の方程式は, 例えば単位接ベクトル $\boldsymbol{u}(t_0)$ を方向ベクトルに選んだ場合,

$$L_{t_0} : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0) + w\boldsymbol{u}(t_0) \quad (w \text{ はパラメータ}) \tag{3}$$

となる.

補注. $\boldsymbol{r}'(t_0)$ や $\boldsymbol{u}(t_0)$ の実際的な求め方: $\boldsymbol{r}'(t)$ や $\boldsymbol{u}(t)$ を先に求めておき, $t = t_0$ を代入すればよい.

例 7.5 練習 7.3 の曲線 C を考える. $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos t & a\sin t & ct \end{bmatrix}$ を微分すると $\boldsymbol{r}'(t) = {}^t\begin{bmatrix} -a\sin t & a\cos t & c \end{bmatrix}$ となるので,

$$\boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{||\boldsymbol{r}'(t)||}\boldsymbol{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}\begin{bmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ c \end{bmatrix} \tag{4}$$

である. そこで例えば, 曲線 C の $t = \frac{\pi}{2}$ における接線 $L_{\frac{\pi}{2}}$ (ただし, 単位接ベクトルを方向ベクトルとする) を求めてみよう. $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{u}(t)$ に $t = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{2}) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & a & \frac{\pi c}{2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}{}^t\begin{bmatrix} -a & 0 & c \end{bmatrix}$ となるので,

$$L_{\frac{\pi}{2}} : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\tfrac{\pi}{2}) + w\boldsymbol{u}(\tfrac{\pi}{2}) \quad (w \text{ はパラメータ}), \tag{5}$$

$$L_{\frac{\pi}{2}} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ \pi c/2 \end{bmatrix} + \frac{w}{\sqrt{a^2 + c^2}}\begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} \frac{-aw}{\sqrt{a^2 + c^2}} & a & \frac{\pi c}{2} + \frac{cw}{\sqrt{a^2 + c^2}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

例 7.6 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t^2 & t^3 & 0 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{r}'(t) = {}^t\begin{bmatrix} 2t & 3t^2 & 0 \end{bmatrix}$．もし $t = 0$ なら $\boldsymbol{r}(0) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r}'(0) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．よって, $t = 0$ (点 O(0,0,0)) における接ベクトルは存在しない．一方, $t \neq 0$ なる点での単位接ベクトルは

$$t > 0 \text{ なら } \boldsymbol{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}\begin{bmatrix} 2 \\ 3t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t < 0 \text{ なら } \boldsymbol{u}(t) = \frac{-1}{\sqrt{4+9t^2}}\begin{bmatrix} 2 \\ 3t \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

定義 7.7

$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ を曲線とする．

(1) C が $t = t_0$ で**滑らか** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{r}'(t_0)$ が存在し, かつ $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$.

(2) C は区間 I で**滑らか** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $t_0 \in I$ に対して (1) が成り立つ．

定理 7.8（滑らかな曲線の長さ）

$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ を滑らかな曲線とする．このとき, C の長さ $|C|$ は

$$|C| = \int_a^b ||\boldsymbol{r}'(t)||\, dt = \int_a^b \left|\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\right| dt \tag{8}$$

で与えられる．より具体的に, $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$ のときは

$$|C| = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \tag{9}$$

と表せる．

補注. この値は曲線のパラメータ表示の仕方によらないことが知られている．(→下記補注: 線素 ds による表記)

例 7.9 練習 7.3 の曲線 C の $0 \leq t \leq 2\pi$ における長さは $|C| = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+c^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+c^2}$ となる．

練習 7.10 xy 平面上の曲線 $C : y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (ただし $f(x)$ は微分可能) の長さは

$$|C| = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{10}$$

で与えられることを示せ．

定義 7.11（弧長）

滑らかな曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ の長さ $|C|$ は (正の) 定数である．しかし, 式 (8) の積分の上端を変数 t に置き換えると積分は t の関数となる．それを $s(t)$ と書き, C の**弧長 (弧長関数)** という:

$$s = s(t) = \int_a^t ||\boldsymbol{r}'(u)||\, du. \tag{11}$$

ここで, a ($s = 0$ となる点) の選択は任意であって, a を変えると s も定数だけ変わる．

補注.（線素 ds） 弧長を微分すれば

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t ||\boldsymbol{r}'(u)||\, du\right) = ||\boldsymbol{r}'(t)|| \tag{12}$$

となるが, 今 $\boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$ なら

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{13}$$

そこで, 曲線の長さに関して, 次のような表記も習慣上しばしば用いられる. 下記の ds は C の**線素**と呼ばれる:

$$d\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix}, \qquad ds = ||d\boldsymbol{r}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{14}$$

$$|C| = \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{15}$$

標語的に書くと「線素 ds を曲線 C に沿って積分すると曲線の長さが得られる」ということである. これは今後学習する**線積分**の特別な場合となっている. 式 (15) を計算するには, 曲線にパラメータ表示を与えて, 式 (9) によって計算する.

補注. 滑らかな曲線 C の弧長 $s = s(t)$ は単調増加関数である (式 (12) より $\frac{ds}{dt} > 0$). それゆえ逆関数が存在する. すなわち, t が s で表せる. これにより, 弧長 s を用いて C をパラメータ表示することができる. そのようにすると, 様々な公式が著しく簡単になることが知られている. 例えば, $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ (s は弧長) のとき, C 上の各点における接ベクトルの長さは必ず 1 になる. 実際, 式 (12) の t を s に置き換えることで $1 = \frac{ds}{ds} = ||\boldsymbol{r}'(s)||$ を得る.

演習問題

7-1. 向き付けされた曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ について以下の問いに答えよ. ただし,

$$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) $t = 0$ のときの C 上の点 P_1 を求めよ.
(2) 点 $P_2(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0)$ は t がいくつのときの点か.
(3) 接ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と単位接ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ.
(4) 点 P_1 および点 P_2 における接線を各々求めよ. ただし, 方向ベクトルは $\boldsymbol{u}$ を用い, パラメータは w とせよ.

7-2. 向き付けされた曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, ただし

$$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

について, C 上の点 $P(1, 1, 1)$ における接線を媒介変数 w を用いて表せ. ただし, 直線の方向ベクトルとして, 前問と同様, 単位接ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いよ.

7-3. 向き付けされた曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, ただし

$$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} 2t^3 & \sqrt{6}t^2 & 2t \end{bmatrix}$$

について, $t = 0$ から $t = t$ までの弧長 s を求めよ. また, 単位接ベクトル $\boldsymbol{u}$ も求めよ.

7-4. 次の曲線 C (アステロイド, 4 尖点内サイクロイド) の長さ $|C|$ を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

$$C : {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos^3 t & a\sin^3 t & 0 \end{bmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

8　スカラー場とベクトル場

- スカラー場・・・各点に値が与えられている空間 (閉じられた空間内の気体の密度, 気温, 湿度等).
  数学的には, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ をその空間の点とし, 3 変数関数 $f(\boldsymbol{r})$ を考えることに相当する.

- ベクトル場・・・各点にベクトルが与えられている空間 (磁力の場, 重力の場等).
  数学的には, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ をその空間の点とし, 3 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ を考えることに相当する.

9　線積分

定義 9.1（スカラー場の線積分）

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた滑らかな曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ があるとする. このとき, スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分を

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\,dt \tag{1}$$

と定義する. 特に, 曲線 C のパラメータが弧長 s のとき, $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds$ と表す. これは次のようにして求められる:

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds = \int_C f(\boldsymbol{r})\frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left\| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right\| dt. \tag{2}$$

例 9.2 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. スカラー場を $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2$, 曲線 C を円らせん

$$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{3}$$

とする. このとき,

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,dt = 2\pi + \frac{8}{3}\pi^3, \qquad \int_C f(\boldsymbol{r})\,ds = 2\sqrt{2}\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi^3. \tag{4}$$

定義 9.3（ベクトル場の線積分）

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた滑らかな曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ があるとする. このとき, ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分を

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt \tag{5}$$

と定義する. ただし,「$\cdot$」はベクトルの内積を表す. ここで,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

と成分表示すると, 上式は

$$\int_C (F_1(\boldsymbol{r})\,dx + F_2(\boldsymbol{r})\,dy + F_3(\boldsymbol{r})\,dz) = \int_a^b \left(F_1(\boldsymbol{r}(t))\frac{dx}{dt} + F_2(\boldsymbol{r}(t))\frac{dy}{dt} + F_3(\boldsymbol{r}(t))\frac{dz}{dt} \right) dt \tag{7}$$

と表せる. より簡潔に次のように表すこともある:

$$\int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \int_a^b \left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt} \right) dt. \tag{8}$$

補注. 線積分の値は曲線 C のパラメータ表示の仕方によらない．それを確認しよう: 曲線 C : $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ を, 変数変換 $t = \varphi(u)$, $a = \varphi(a_2), b = \varphi(b_2)$ で u をパラメータとする表示に変換したとする．それを便宜上 C_2 と表す．$C_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi(u)) = \boldsymbol{r}_2(u)$, $a_2 \leq u \leq b_2$．このとき, 線積分の定義ならびに合成関数の微分法と置換積分法より,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{a_2}^{b_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2(u)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2(u)}{du}\, du \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{du}\, du = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

補注. 上の補注より, 特にパラメータ t として弧長 s を取ることができる．そうすると, 曲線上の各点における接ベクトル $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ は単位ベクトルになるため, それを $\boldsymbol{u}(s)$ で表すと

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\, ds = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{u}(s)\, ds \tag{9}$$

となる．内積 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の成分, すなわち接線成分を与える．

補注. 線積分の記号について, C が閉曲線のときは $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ とも記す．

命題 9.4（線積分の性質）

線積分について次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_C (\lambda\boldsymbol{F} + \mu\boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lambda \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \mu \int_C \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{r}$ 　(λ, μ は定数),

(2) $C = C_1 + C_2$ (滑らかな 2 曲線 C_1 と C_2 の繋ぎ合わせ) のとき, $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$,

(3) C の向きを反対にした曲線を $-C$ と表すとき, $\displaystyle\int_{(-C)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

例 9.5 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3y & x & 2\sin^2 z \end{bmatrix}$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(1) C は点 $\mathrm{P}(0,1,0)$ から点 $\mathrm{Q}(1,0,\frac{\pi}{2})$ に至る線分 　　(答) $1 + \frac{\pi}{2}$

(2) $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \end{bmatrix}$, 　$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 　　(答) 0

例 9.6 力の場 (重力の場, 電場など) の中の曲線 C に沿って質点 m が, 力 $\boldsymbol{F}$ を受けながら, 始点 P から終点 Q まで移動するとき, 力 $\boldsymbol{F}$ が m に行った仕事 W は線積分で表される:

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{10}$$

演習問題

9-1. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．スカラー場を $f(\boldsymbol{r}) = 10x + 20yz$, 曲線を $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & t & t^2 \end{bmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ とする．このとき, $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\, dt$ と $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r})\, ds$ を求めよ．

9-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} x^2 + 2y & 7yz & -8x^2 z \end{bmatrix}$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(1) C は原点 O から点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ に至る線分

(2) $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$, 　$0 \leq t \leq 1$

(3) C は原点 O, 点 $\mathrm{P}(1,1,0)$, 点 $\mathrm{Q}(1,1,1)$ を順次に結ぶ折れ線

10　特別な線積分

1 変数関数の定積分において, 例えば奇関数の閉区間 $[-a, a]$ 上の積分値は必ず 0 である．線積分においても, “被積分関数” や “積分領域” が特別な場合の積分公式がある．

定義 10.1（スカラー場の勾配）

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．偏微分可能なスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の空間内での変化率を表すものとして, ベクトル場

$$\operatorname{grad}\varphi = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1}$$

を考える．これをスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の**勾配 (勾配ベクトル場) (gradient)** という．記号的にベクトル演算子 $\nabla = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ を導入し, $\nabla\varphi$ と書き表すこともある．今後は記号 $\nabla\varphi$ をよく用いる．

例 10.2 スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + 4yz^3$ の勾配は $\nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} 2x & 4z^3 & 12yz^2 \end{bmatrix}$.

例 10.3 スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = C$ (定数) の勾配は $\nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．逆に, スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ がそのすべての点で $\nabla\varphi = \boldsymbol{0}$ を満たせば, φ は定数.

定理 10.4

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．$\varphi(\boldsymbol{r})$ をスカラー場とし, φ の勾配 $\nabla\varphi$ 内の区分的に滑らかな曲線 C (始点 P, 終点 Q) を考える．このとき, $\nabla\varphi$ の C に沿う線積分は次のようになる．

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}). \tag{2}$$

【証明】便宜上, ここでは $\varphi = \varphi(x, y, z)$ と記す．C が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$, $a \leq t \leq b$ と表されているとする．このとき, 線積分の定義, 合成関数の微分法, および微分積分学の基本公式より

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz \right) && (3)\\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt && (4)\\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t))\,dt && (5)\\
&= \Big[\varphi(x(t), y(t), z(t)) \Big]_{t=a}^{t=b} && (6)\\
&= \varphi(x(b), y(b), z(b)) - \varphi(x(a), y(a), z(a)) && (7)\\
&= \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) && (8)
\end{aligned}$$

となる．C が有限個のパラメータ表示された曲線の繋ぎ合わせの場合, 例えば $C = C_1 + C_2$ で点 R が繋ぎ目のときは

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{C_1} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} && (9)\\
&= \{\varphi(\mathrm{R}) - \varphi(\mathrm{P})\} + \{\varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{R})\} && (10)\\
&= \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) && (11)
\end{aligned}$$

となる．繋ぎ目が 3 つ以上あっても同様である．□

補注. 式 (2) は, 線積分の値が曲線の途中経路によらず始終点の値のみで決まることを表している. それゆえ, あるスカラー場の勾配に対する線積分は**経路によらない線積分**と呼ばれ,

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_P^Q \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \Big[\varphi\Big]_P^Q = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) \tag{12}$$

とも書く. この定理は明らかに「微分積分学の基本公式」

$$\int_a^b \frac{d}{dx}f(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a) \tag{13}$$

の拡張となっている.

系 10.5
$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}$ とする. $\varphi(\boldsymbol{r})$ をスカラー場とし, φ の勾配 $\nabla\varphi$ 内の閉曲線 C を考える. このとき,

$$\oint_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{14}$$

【証明】上の定理において特に C が閉曲線ならば点 P と点 Q は同一点なので, $\varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{P}) = 0$ となる. □

例 10.6 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}$ とする. スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, C は原点 O, 点 P$(1,1,0)$, 点 Q$(1,1,1)$ を順次に結ぶ折れ線とする.

解. C の始点は O, 終点は Q であるから,

$$\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_O^Q \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \Big[\varphi\Big]_O^Q = \varphi(\mathrm{Q}) - \varphi(\mathrm{O}) = (1^2+1^2+1^2) - (0^2+0^2+0^2) = 3. \tag{15}$$

例 10.7 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3x^2+y & x+1 & 0\end{bmatrix}$ について, 次の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} t & e^t & 0\end{bmatrix}$, $\quad 0 \le t \le 1$.

解. 線積分の定義に従って計算することもできるが, 次のことに気づくと容易に計算できる. $\varphi = x^3 + xy + y$ とおくと, φ はスカラー場で, その勾配は $\nabla\varphi = \boldsymbol{F}$ となる. よって, この線積分は経路によらない. C の始点は $(0,1,0)$, 終点は $(1,e,0)$ なので,

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,1,0)}^{(1,e,0)} \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r} = \Big[x^3+xy+y\Big]_{(0,1,0)}^{(1,e,0)} = (1+e+e) - (0+0+1) = 2e. \tag{16}$$

演習問題

10-1. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} x^2 & 2y & \cos z\end{bmatrix}$, $\quad C$ は点 P$(1,0,0)$ から点 Q$(1,1,\frac{\pi}{2})$ への線分.

(2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} yz & xz & xy\end{bmatrix}$, $\quad C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t\end{bmatrix}$, $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} y+z & x+z & x+y\end{bmatrix}$, $\quad C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = {}^t\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & t\end{bmatrix}$, $\quad 0 \le t \le 1$

10-2. 例 10.6 と同じ問題を線積分の定義に従って解き, 答えが一致することを確かめよ. (まず $\nabla\varphi$ を求めよ. 次に, 前節のやり方で $\displaystyle\int_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ.)