11　曲面とベクトル関数

11.1 $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とし, 2 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{bmatrix}$ を考える．このとき, $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ は一般に空間内の曲面を表す．これは曲面のパラメータ表示 (u, v がパラメータ) に他ならない．

例 11.2 2 変数関数のグラフ $S : z = f(x,y)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & f(u,v) \end{bmatrix}$ と表せる．例えば平面 $z = 1 - x - y$ の場合は, $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & 1-u-v \end{bmatrix}$.

例 11.3　円柱面 $S : x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ と表せる．

例 11.4 円錐面 $S : z^2 = x^2 + y^2$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & u \end{bmatrix}$ と表せる．

例 11.5 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ は $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = {}^t\begin{bmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \end{bmatrix}$ と表せる．

定義 11.6（曲面上の曲線）
$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面とする．このとき, もし ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \end{bmatrix}$ ならば, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)) =: \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ は S 上の曲線を表す．特に, $\boldsymbol{r}(u,v)$ において片方のパラメータのみを動かして得られる曲線を**パラメータ曲線**という．u を動かした場合は u **曲線**, v を動かした場合は v **曲線**という．

例 11.7（例 11.3 の続き）　円柱面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ 上の曲線の例を 3 つ挙げる．

(i) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} t & ct \end{bmatrix}$ (c は定数) ならば, $C : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos t & a\sin t & ct \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$.（円らせん）

(ii) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u & v_0 \end{bmatrix}$ (v_0 は定数) ならば, $C_1 : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v_0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}_1(u)$.（平面 $z = v_0$ 上の円）

(iii) ${}^t\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} u_0 & v \end{bmatrix}$ (u_0 は定数) ならば, $C_2 : \boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u_0 & a\sin u_0 & v \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{r}}_2(v)$.（$z$ 軸に平行な直線）

(C_1 は u 曲線, C_2 は v 曲線．円らせんはパラメータ曲線ではない．詳しくは図を描いて説明する．)

11.8（パラメータ曲線の接ベクトル） $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ を曲面とする．$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ を S 上の点 P_0 とする．点 P_0 を通るふたつのパラメータ曲線

$$C_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0) =: \tilde{\boldsymbol{r}}_1(u) \qquad (\text{点 } \mathrm{P}_0 \text{ を通る } u \text{ 曲線}), \tag{1}$$

$$C_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v) =: \tilde{\boldsymbol{r}}_2(v) \qquad (\text{点 } \mathrm{P}_0 \text{ を通る } v \text{ 曲線}) \tag{2}$$

を考える．このとき, $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(u)$ と $\tilde{\boldsymbol{r}}_2(v)$ をそれぞれ微分すると

$$\frac{d}{du}\tilde{\boldsymbol{r}}_1(u) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u, v_0) = \boldsymbol{r}_u(u, v_0), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dv}\tilde{\boldsymbol{r}}_2(v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0, v) = \boldsymbol{r}_v(u_0, v) \tag{4}$$

となる．以上より, 2 変数ベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ の点 (u_0, v_0) における偏微分係数 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ は (もし $\neq \boldsymbol{0}$ なら) それぞれ点 P_0 での C_1 と C_2 の接ベクトルとなることが分かった．

例 11.9（例 11.7 の続き）　円柱面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ において, u 曲線 C_1 の接ベクトルは $\boldsymbol{r}_u(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} -a\sin u & a\cos u & 0 \end{bmatrix}$ であり, v 曲線 C_2 の接ベクトルは $\boldsymbol{r}_v(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．これらに $(u,v) = (u_0, v_0)$ を代入すれば, その点におけるパラメータ曲線の接ベクトルが具体的に求まる．

定義 11.10（法ベクトルと接平面）

$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ を曲面とする．ふたつのパラメータ曲線の接ベクトルの外積を考え，

$$\boldsymbol{N}(u, v) = \boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v) \tag{5}$$

とおく (単に $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ とも書く)．$\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ となる点では $\boldsymbol{N}$ は曲面に直交する方向を向く．そこで，$\boldsymbol{N}$ を曲面 S の**法ベクトル (法線ベクトル)** という．また，法ベクトルの長さを 1 に正規化したものを**単位法ベクトル**といい，$\boldsymbol{n}$ で表す ($\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{||\boldsymbol{N}||}\boldsymbol{N}$)．$S$ 上の点 P を通り $\boldsymbol{N}$ (または $\boldsymbol{n}$) に直交する平面を曲面 S の点 P における**接平面**という．

例 11.11（例 11.9 の続き） 円柱面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & v \end{bmatrix}$ の法ベクトルは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = {}^t\begin{bmatrix} -a\sin u & a\cos u & 0 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} a\cos u & a\sin u & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

となる．例えば $(u, v) = (\frac{\pi}{4}, 1)$ のときを考える．このときの S 上の点 P は $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 1)$．点 P での法ベクトルは

$$\boldsymbol{N}(\tfrac{\pi}{4}, 1) = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{2}} & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

よって，円柱面 S の点 P における接平面は

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + 0(z - 1) = 0 \tag{8}$$

$$\therefore x + y - \sqrt{2}a = 0. \tag{9}$$

定義 11.12

(1) 曲面 S は**滑らか** $\overset{\text{def}}{\iff}$ S の法線が S 上の点とともに連続的に変化する．
(2) 曲面 S は**区分的に滑らか** $\overset{\text{def}}{\iff}$ S は有限個の滑らかな曲面を貼り合わせた曲面．

演習問題

11-1. 以下のベクトル関数 $\boldsymbol{r}(u, v)$ で定義される曲面を $z = f(x, y)$ または $g(x, y, z) = 0$ の形で表示せよ．ただし，a, b, c は定数である．また，パラメータ曲線を調べよ．さらに法ベクトル $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ を定めよ．

(1) 平面 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} u & v & 1 - u - v \end{bmatrix}$

(2) 円錐 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & cu \end{bmatrix}$

(3) 回転放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} u\cos v & u\sin v & u^2 \end{bmatrix}$

(4) 楕円放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} au\cos v & bu\sin v & u^2 \end{bmatrix}$

(5) 双曲放物面 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} au\cosh v & bu\sinh v & u^2 \end{bmatrix}$

(6) 双曲面 $\boldsymbol{r}(u, v) = {}^t\begin{bmatrix} a\sinh u\cos v & b\sinh u\sin v & c\cosh u \end{bmatrix}$

11-2. 次の曲面にパラメータ表示をひとつ与えよ．法ベクトルも答えよ．

(1) 平面 $x = z$

(2) 平面 $3x + 4y + 5z = 6$

(3) 楕円柱 $4x^2 + 9y^2 = 36$

(4) 双曲柱 $x^2 - y^2 = 1$

(5) 楕円錐 $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$

12　面積分

曲面の面素と表面積

12.1（面素）$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ の上に 4 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v), \quad \boldsymbol{r}(u, v + \Delta v), \quad \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) \tag{1}$$

として取る．これらは互いに近い点とし，微小図形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$ を考え，その面積を ΔS とする．ΔS は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ が作る平行四辺形の面積で近似できる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \fallingdotseq \frac{\partial r}{\partial u}\Delta u \quad (u \text{ 曲線の接ベクトル}), \qquad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \fallingdotseq \frac{\partial r}{\partial v}\Delta v \quad (v \text{ 曲線の接ベクトル}) \tag{2}$$

に注意すれば

$$\Delta S \fallingdotseq \left\| \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \right\| \fallingdotseq \left\| \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u \right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v \right) \right\| = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \tag{3}$$

を得る．そこで，

$$dS = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \tag{4}$$

とおき，これを S の**面素**あるいは**面積要素**という．前節の法ベクトルの記号を用いれば

$$dS = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|\, du\, dv = \|\boldsymbol{N}\|\, du\, dv \tag{5}$$

とも表せる．

定理 12.2（曲面の表面積）

曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, D は閉領域, の表面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \quad \left(= \iint_S dS \text{ と書く} \right) \tag{6}$$

で与えられる．

練習 12.3 滑らかな 2 変数関数のグラフ $S : z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, D は閉領域, の表面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + \{f_x(x, y)\}^2 + \{f_y(x, y)\}^2}\, dx\, dy \tag{7}$$

で与えられることを示せ．

スカラー場の面積分

定義 12.4

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, D は閉領域, とその上で定義されたスカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ を考える．このとき，

$$\iint_S \varphi(\boldsymbol{r})\, dS = \iint_D \varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \tag{8}$$

をスカラー場 φ の曲面 S に沿う**面積分**という．(注意: 特に $\varphi = 1$ なら曲面 S の表面積 $|S|$ を表す.)

ベクトル場の面積分

定義 12.5

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ 内に向き付けされた曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, D は閉領域, があるとする．S の法ベクトル $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ と $\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ のうち, S の向きと一致する方を $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(u,v)$ とする．このとき,

$$\left(\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \right) \quad \iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \boldsymbol{N}(u,v)\, du\, dv \tag{9}$$

と定義し, ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S に沿う**面積分**という．ただし,「$\cdot$」は内積, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{||\boldsymbol{N}||}\boldsymbol{N}$ は単位法ベクトル, $dS = ||\boldsymbol{N}||\, du\, dv$ は面素, $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{N}\, du\, dv$ はベクトル面素.

ここで, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r}(u,v) = {}^t\begin{bmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) \end{bmatrix}$ と成分表示してみよう．S の法ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{bmatrix}$$

となるので, 仮に $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ ならば

$$\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \left\{ G_1(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + G_2(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + G_3(\boldsymbol{r}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\, dv \tag{10}$$

と表せる．右辺はより簡潔に次のように表すこともある:

$$\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D \left\{ G_1\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + G_2\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + G_3\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du\, dv \tag{11}$$

補注． 面積分の値は曲面 S のパラメータ表示の仕方によらない．

補注． $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ とした場合と $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_u$ とした場合では積分値のプラスマイナスが反対になる．

補注． 面積分は流れの問題において自然な形で現れ, $\boldsymbol{G} = \rho\boldsymbol{v}$ のときに S を通る流束 (単位時間あたりの S を通る流体の質量) を与える．ここで, ρ は流体の密度, $\boldsymbol{v}$ は流れの速度ベクトルである．この意味で, **流束積分**ということもできる．

演習問題

12-1. 半径 a $(a > 0)$ の球の表面積を求めよ．

12-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ の曲面 S に沿う面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} z & x & 2x + 3y \end{bmatrix}$, $\quad S : x^2 + y^2 = 9,\ x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4$ (円柱面．外側がオモテ)

(2) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3z^2 & x & -2y \end{bmatrix}$, $\quad S : 2x + y + z = 2,\ x, y, z \geq 0$ (平面．原点のない側がオモテ)

(3) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} x - z & y - x & z - y \end{bmatrix}$, $\quad S : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 3$ (円錐面．外側がオモテ)

13　積分定理

復習と準備

$\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする.

(1) スカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ の**勾配** (gradient):

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = {}^t\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{bmatrix}$$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ の**回転** (rotation, curl):

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{curl}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}F_3 - \frac{\partial}{\partial z}F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z}F_1 - \frac{\partial}{\partial x}F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1 \end{bmatrix}$$

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$ の**発散** (divergence):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{G} = \nabla\cdot\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}G_1 + \frac{\partial}{\partial y}G_2 + \frac{\partial}{\partial z}G_3$$

例 13.1 $\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} yz & 3xz & z \end{bmatrix}$ のとき, $\nabla\times\boldsymbol{F} = {}^t\begin{bmatrix} -3x & y & 2z \end{bmatrix}$.

例 13.2 $\boldsymbol{G} = {}^t\begin{bmatrix} x^2+y & \sin xyz & e^{xyz} \end{bmatrix}$ のとき, $\nabla\cdot\boldsymbol{G} = 2x + xz\cos xyz + xy\,e^{xyz}$.

練習 13.3 C^2 級のスカラー場 φ に対して $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. これを示せ.

練習 13.4 C^2 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対して $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$ が成り立つ. これを示せ.

積分定理

定理 13.5（微分積分学の基本公式）

$I = [a, b]$ を有界閉区間とする. このとき, I 上 C^1 級の関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b \frac{d}{dx}f(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{1}$$

が成り立つ. (補注: 右辺は I の境界 $\partial I = \{a, b\}$ から定まる値と捉えることができる.)

定理 13.6（経路によらない線積分）

C を空間内の区分的に滑らかな向き付けられた曲線とし, その始点を A, 終点を B とする. このとき, 曲線 C を含む領域内で C^1 級のスカラー場 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_C (\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (\varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ. (補注: 右辺は C の境界 $\partial C = \{A, B\}$ から定まる値と捉えることができる.)

定理 13.7（Green の定理, 2 重積分と線積分の変換）

D を平面上の有界閉領域とし, ∂D をその境界とする．ただし, ∂D は区分的に滑らかな単純閉曲線 (自身と交わらない閉じた曲線) で, その向きは D の内部を左手に触りながら進む向きとする．このとき, D を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} &\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy \\ &= \oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial D} (F_1\,dx + F_2\,dy) \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ．

定理 13.8（Stokes の定理, 面積分と線積分の変換）

S を空間内の区分的に滑らかな向き付けられた曲面とし, ∂S をその境界とする．ただし, ∂S は区分的に滑らかな単純閉曲線 (自身と交わらない閉じた曲線) で, その向きは S のオモテ面の内部を左手に触りながら進む向きとする．このとき, S を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{r}) & F_2(\boldsymbol{r}) & F_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} &\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS \\ &= \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\partial S} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つ．

定理 13.9（Gauss の発散定理, 3 重積分と面積分の変換）

V を空間内の有界閉領域とし, ∂V をその境界面とする．ただし, ∂V は区分的に滑らかな向き付けられる曲面で, その向きは V の外側がオモテとなる向きとする．このとき, V を含む C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{r}) & G_2(\boldsymbol{r}) & G_3(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{G})\,dx\,dy\,dz &= \iiint_V \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz \\ &= \iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\,dS \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ．

演習問題

13-1. 平面において, 単純閉曲線で囲まれた領域 D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y\,dx + x\,dy) \tag{6}$$

で与えられることを示せ．

13-2. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} -y & x - 2xz & xy \end{bmatrix}$, S は半球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ に z 軸の向きをもつ曲面とする．このとき, 面積分 $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

13-3. $\boldsymbol{r} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ とする．ガウスの発散定理を用いて面積分 $\displaystyle\iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．
ベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = {}^t\begin{bmatrix} 3x & y^2 & xz \end{bmatrix}$, V は面 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ で囲まれた領域．

14　ベクトル解析の追加演習問題

演習問題 (※前節の積分定理を用いる問題が多めである)

14-1. 放物線 $C : y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$ の長さ $|C|$ を求めよ.

14-2. 曲面 $S : z = xy,\ x^2 + y^2 \leq a^2\ (a > 0)$ の面積 $|S|$ を求めよ.

14-3. 1 次微分形式 ω の, 平面上の閉領域 D の境界線 ∂D に沿う線積分 $\displaystyle\oint_{\partial D} \omega$ を求めよ.

(1) $\omega = (x + y^2)\,dx + (x^2 + y)\,dy,\quad D$ は放物線 $y = x^2$ と直線 $x + y = 2$ で囲まれた領域.

(2) $\omega = (x^2 - 4y^2)\,dx + (2y - 3xy)\,dy,\quad D$: 3 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形の周および内部.

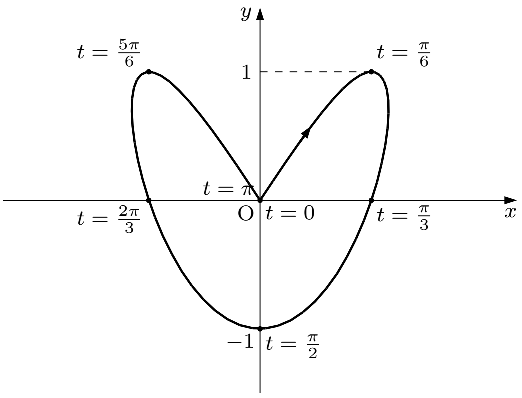
(3) $\omega = (x^2 - 4y^2)\,dx + (2y - 3xy)\,dy,\quad D$: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域.

14-4. 以下の問いに答えよ.

(1) 平面上の有界閉領域 D の面積 $|D|$ は次のいずれの式でも与えられる. それぞれを示せ.

$$|D| = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} \{(-y)\,dx + x\,dy\}, \qquad |D| = \oint_{\partial D} (-y)\,dx, \qquad |D| = \oint_{\partial D} x\,dy$$

(2) 上のいずれかの公式を用いて閉曲線 $C : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 3t \end{bmatrix}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ によって囲まれた領域の面積を求めよ. なお, この曲線はリサージュ曲線と呼ばれる. (hint: 曲線の向きに注意)



14-5. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ の, 境界のある向き付けられた曲面 S に沿う面積分 $\displaystyle\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F} = {}^t\!\begin{bmatrix} x^3 + 3y & 2x^2 + 5z & 5y + z \end{bmatrix},\quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\quad z \geq 0$ (半球, 外側向き)

(2) $\boldsymbol{F} = {}^t\!\begin{bmatrix} -4z & 2x & -2x \end{bmatrix},\quad S : z = y + 1,\quad x^2 + y^2 \leq 1$ (平面の一部 (楕円形), z 軸方向の向き)

(3) $\boldsymbol{F} = {}^t\!\begin{bmatrix} 2x + y & x & 3z^2 \end{bmatrix},\quad S : z = y + 1,\quad x^2 + y^2 \leq 1$ (平面の一部 (楕円形), z 軸方向の向き)

(4) $\boldsymbol{F} = {}^t\!\begin{bmatrix} 2x + y & x & 3z^2 \end{bmatrix},\quad S : x + y + z = 1,\quad x, y, z \geq 0$ (平面の一部 (三角形), z 軸方向の向き)

14-6. ベクトル場 $\boldsymbol{G}$ の, 空間閉領域 V の境界面 ∂V に沿う面積分 $\displaystyle\iint_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{G} = {}^t\!\begin{bmatrix} x^2 & yz & x + y \end{bmatrix},\quad V$ は面 $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = y$ で囲まれた領域 (三角柱)

(2) $\boldsymbol{G} = {}^t\!\begin{bmatrix} 7x & 1 & -z \end{bmatrix},\quad V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ (球)

(3) $\boldsymbol{G} = {}^t\!\begin{bmatrix} 5 & 10y & z^3 \end{bmatrix},\quad V : 0 \leq x \leq 1,\quad \frac{x}{2} \leq y \leq x,\quad 0 \leq z \leq y$ (四角錐)