# 1　微分方程式

独立変数, 未知関数および未知関数の導関数の間の関係式を**微分方程式** (Differential equation=D.E.) という.

## 1.1　常微分方程式と偏微分方程式

次の形の方程式を $n$ **階常微分方程式**という:

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ の形の方程式. (1)

ただし, $F$ は既知関数, $x$ は独立変数, $y = y(x)$ は未知関数, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

「常微分方程式」は独立変数がひとつの場合の呼称. 独立変数がふたつ以上あるときは「偏微分方程式」という.

例 1. $x + yy' = 0$　　例 2. $y'' - 3y' + 2y = 0$　　例 3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ($z = z(x, y)$ が未知関数)

→ 例 1 と例 2 はそれぞれ 1 階と 2 階の常微分方程式, 例 3 は 2 階偏微分方程式.

## 1.2　微分方程式の解

微分方程式を満足する関数を**解**といい, 解を求めることを**解く**という.

一般に, $n$ 階常微分方程式 (1) は $n$ 個の任意定数を含む解を持つ. この解を微分方程式 (1) の**一般解**という. 一般解の任意定数に特定の値を代入し得られる解を**特殊解**という.

例 4. $y = \sqrt{1 - x^2}$ は例 1 の解.　例 5. $y = e^x$ や $y = e^{2x}$ は例 2 の解.　例 6. $z = \log(x^2 + y^2)$ は例 3 の解.

練習. これらがそれぞれの微分方程式の解であることを確認せよ.

例 7. 任意定数 $A, B$ に対して, $y = Ae^x + Be^{2x}$ は $y'' - 3y' + 2y = 0$ (例 2) の一般解である. 一方, 例 5 のふたつの関数や $y = 3e^x + 4e^{2x}$ などは特殊解である.

## 1.3　初期条件と境界条件

一般に, $n$ 階常微分方程式 (1) では特殊解をひとつ指定するために $n$ 個の条件が必要である. そのような条件のうちで, 1 点 $x = x_0$ での解およびその導関数の値を指定するものを**初期条件**という. 一方, ふたつ以上の点で, その各点における解またはその導関数の値を指定する条件を**境界条件**という.

例 8. 2 階常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ (例 2) に対して, 初期条件「$x = 0$ のとき $y = 1$, $y' = 3$」を与えると, 特殊解がひとつ定まる. 実際, 一般解 $y = Ae^x + Be^{2x}$ (例 7) を微分すると $y' = Ae^x + 2Be^{2x}$ であるから, 初期条件より $A + B = 1$, $A + 2B = 3$ を得る. これより, $A = -1$, $B = 2$. よって, 特殊解 $y = -e^x + 2e^{2x}$ を得る.

例 9. 2 階常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ (例 2) に対して, 境界条件「$x = 0$ のとき $y = 0$, $x = 1$ のとき $y = e$」を与えると, 特殊解 $y = \frac{1}{e-1}(-e^x + e^{2x})$ を得る.

練習. 例 8 に倣ってこれを示せ.

## 1.4　求積法

微分方程式の一般解を不定積分の有限回の繰り返しによって求めることを**求積法で解く**という.

# 2　1階の微分方程式の解法

いくつかの求積法による解法を授業で説明する. (資料上では割愛)

(1) 変数分離形　(2) 1 階線形微分方程式　(3) 完全微分方程式

**演習問題**

※以下, $x$ は独立変数, $y = y(x)$ は未知関数, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

2-1. 次の変数分離形微分方程式の一般解を求めよ. また, 初期条件がある場合は特殊解も求めよ.

(1) $(1 + x^2)y' = x$

(2) $y' = -xy$

(3) $(x \log x)y' = y$

(4) $y' = 1 + y^2$

(5) $y' = (1 + 4y^2) \cos x$

(6) $y' + \dfrac{y}{\sin x} = 0$

(7) $xy' = y^2 + y$

(8) $xy' + y = 0,\ y(2) = -2$

(9) $e^x y' = 2(x + 1)y^2,\ y(0) = \dfrac{1}{6}$

(10) $y' \cosh^2 x - \sin^2 y = 0,\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}$

2-2. 次の 1 階線形微分方程式の一般解を求めよ. また, 初期条件がある場合は特殊解も求めよ.

(1) $y' - \dfrac{1}{x}y = x \ \ (x > 0)$

(2) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x \ \ (x > 0)$

(3) $ay' + by = c$ ($a, b, c$ は定数, $a \neq 0$)

(4) $y' - y = \sin x$

(5) $(1 + x^2)y' - xy = 1$

(6) $y' - y \tan x = \cos x$

(7) $y' + y = x^2,\ y(0) = 1$

(8) $xy' + y = 4x(1 + x^2),\ y(1) = 4$

2-3. 次の微分方程式が完全微分方程式であることを確かめ, 一般解を求めよ.

(1) $(x^2 + y)\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$

(2) $\left(4x^3y^2 + x^2y + \frac{1}{2}\right)\,dx + \left(2x^4y + \frac{1}{3}x^3\right)\,dy = 0$

(3) $y \sin 2xy\,dx + x \sin 2xy\,dy = 0$

## 3 線形微分方程式

次の形の方程式を $n$ **階線形微分方程式** (Linear defferential equation = L.D.E.) という:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{1}$$

$f(x) = 0$ のときは**斉次 (同次) 方程式**, $f(x) \neq 0$ のときは**非斉次 (非同次) 方程式**と呼ぶ.

以下, (1) の左辺を $L(y)$ と置き, $n$ 階線形微分方程式 $L(y) = 0$ または $L(y) = f(x)$ の解について考える.

**定理 3.1**（線形の原理）

斉次方程式 $L(y) = 0$ について, もし $u_1(x)$ と $u_2(x)$ がその解ならば, 任意の定数 $c_1, c_2$ に対して, $c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ も解である.

**補注.** $\mathcal{C}^n$ を $C^n$ 級関数全体の集合とすると, $\mathcal{C}^n$ は関数の和と実数倍 (スカラー倍) によって $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間をなす: $u, v \in \mathcal{C}^n$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\text{和 } (u + v)(x) := u(x) + v(x), \qquad \text{スカラー倍 } (cu)(x) := cu(x). \tag{2}$$

定理 3.1 は, 斉次方程式 $L(y) = 0$ の解全体の集合

$$V = \{y \in \mathcal{C}^n \mid L(y) = 0\} \tag{3}$$

が和とスカラー倍で閉じていて, $\mathcal{C}^n$ の部分空間になることを意味している.

**定理 3.2**（初期条件の下での線形微分方程式の解の一意存在性）

線形微分方程式 $L(y) = f(x)$ について, $a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ は開区間 $(\alpha, \beta)$ 上の連続関数とする. このとき, 区間 $(\alpha, \beta)$ に含まれる $b$ と任意の定数 $c_1, \ldots, c_n$ に対して, 初期条件

$$y(b) = c_1, \quad y'(b) = c_2, \quad \ldots \quad, \quad y^{(n-1)}(b) = c_n \tag{4}$$

を満たす解がただひとつ存在する. この解は区間 $(\alpha, \beta)$ 全体で定義された関数となる.

**補題 3.3**

斉次方程式 $L(y) = 0$ の解 $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ が 1 次独立であるための必要十分条件は, 行列式

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

が決して 0 にならないことである. これを**ロンスキアン** (Wronskian) という.

**補注.** 「$c_1u_1(x) + \cdots + c_nu_n(x) \equiv 0$ ならば $c_1 = \cdots = c_n = 0$」が成り立つとき, $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ は **1 次独立**であるという. 1 次独立でないときは **1 次従属**であるという.

**定理 3.4**

斉次方程式 $L(y)=0$ について, もし $u_1(x),\dots,u_n(x)$ が解でかつ 1 次独立ならば, 任意の解 (一般解) は

$$y=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x) \tag{6}$$

で与えられる. ただし, $c_1,\dots,c_n$ は任意定数. (このとき, $u_1(x),\dots,u_n(x)$ を $L(y)=0$ の**解の基底**という.)

**補注.** 定理 3.4 は, 斉次方程式 $L(y)=0$ の解全体からなる $\mathcal{C}^n$ の部分空間 $V=\{y\in\mathcal{C}^n \mid L(y)=0\}$ が, 基底 $u_1,\dots,u_n$ によって生成される $n$ 次元の部分空間 $\langle u_1,\dots,u_n\rangle$ に等しいことを意味している. すなわち,

$$V=\{y\in\mathcal{C}^n \mid L(y)=0\}=\langle u_1,\dots,u_n\rangle=\{c_1u_1+\cdots+c_nu_n \mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}\}. \tag{7}$$

**定理 3.5**

非斉次方程式 $L(y)=f(x)$ について, $u_0(x)$ を特殊解とする. さらに, $u_1(x),\dots,u_n(x)$ を斉次方程式 $L(y)=0$ の解の基底とする. このとき, $L(y)=f(x)$ の一般解は

$$y=u_0(x)+c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x) \tag{8}$$

で与えられる. ただし, $c_1,\dots,c_n$ は任意定数.

**例 3.6** まず, 2 階の斉次線形微分方程式 $y''+y=0$ を考えよう. 簡単に確かめられるように, $u_1=\cos x$ と $u_2=\sin x$ はともに解である. また, ロンスキアンを調べると

$$W(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0 \tag{9}$$

となるので, 補題 3.3 より, $u_1,u_2$ は 1 次独立である. よって, 定理 3.4 より, $u_1,u_2$ はこの方程式の解の基底であり, 一般解は

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \quad (c_1,c_2 \text{ は任意定数}) \tag{10}$$

で与えられる.

次に, 2 階の非斉次線形微分方程式 $y''+y=2e^x$ を考えよう. 簡単に確かめられるように, $u_0=e^x$ はこの方程式の解である. よって, 定理 3.5 より, 一般解は

$$y=e^x+c_1\cos x+c_2\sin x \quad (c_1,c_2 \text{ は任意定数}) \tag{11}$$

で与えられる.

### 演習問題

3-1. 与えられた関数が対応する斉次方程式の解の基底をなすことを証明せよ.

(1) $e^{-x},\ xe^{-x};\quad y''+2y'+y=0$

(2) $1,\ x,\ x^2;\quad y'''=0$

(3) $1,\ x,\ x^{-1};\quad xy'''+3y''=0$

(4) $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x};\quad y'''-2y''-y'+2y=0$

(5) $e^x\cos x,\ e^x\sin x,\ e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x;\quad y^{(4)}+4y=0$

(6) $\cosh x,\ \sinh x,\ \cos x,\ \sin x;\quad y^{(4)}-y=0$

# 4　定数係数斉次線形微分方程式

次の形の方程式を $n$ **階定数係数斉次線形微分方程式**という:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ は定数}, a_0 \neq 0). \tag{1}$$

この微分方程式に対して

$$F(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n \tag{2}$$

とおく．これを (1) の**特性多項式**といい, $n$ 次方程式 $F(t) = 0$ を (1) の**特性方程式**という.

## 4.1　微分演算子 $D$

$D = \frac{d}{dx}$ とおくと, $y' = \frac{d}{dx}y = Dy$ と表せる．この記号を用いると, $y'' = Dy' = D(Dy) = D^2y$ と表せる．同様に, $y^{(k)} = D^ky$. すなわち, $D^k = \frac{d^k}{dx^x}$ $(k \geq 1)$ である.

このとき, 微分方程式 (1) は

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = 0, \qquad \text{すなわち}, F(D)y = 0 \tag{3}$$

と表せる．ここで, $F(t)$ は (1) の特性多項式.

**例 4.1** 微分演算子として $D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2) = (D+2)(D-1)$ が成り立つ．実際, 関数 $y$ に対して

$$\begin{aligned}(D-1)\{(D+2)y\} &= (D-1)(y' + 2y) = (y' + 2y)' - (y' + 2y) \\ &= y'' + 2y' - y' - 2y = y'' + y' - 2y = (D^2 + D - 2)y\end{aligned}$$

となる．同様に $(D+2)\{(D-1)y\} = (D^2 + D - 2)y$ も示せる.

**命題 4.2**

一般に $F(t), G(t)$ が多項式のとき, $H(t) = F(t)G(t)$ とおけば

$$H(D) = F(D)G(D) = G(D)F(D) \tag{4}$$

が成り立つ．すなわち, 関数 $y$ に対して $H(D)y = F(D)\{G(D)y\} = G(D)\{F(D)y\}$ が成り立つ.

**定理 4.3 (Text: 定理 5.4.1)**

一般に $F(t)$ を多項式, $\alpha$ を定数, $y$ を関数とすれば, 次が成り立つ.

(1) $F(D)e^{\alpha x} = F(\alpha)e^{\alpha x}$　　　(2) $F(D)(e^{\alpha x}y) = e^{\alpha x}F(D+\alpha)y$

【証明】(1) $F(t)$ は式 (2) と同じものとする．このとき,

$$\begin{aligned}F(D)e^{\alpha x} &= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-2}D^2 + a_{n-1}D + a_n)e^{\alpha x} &(5)\\ &= a_0D^ne^{\alpha x} + a_1D^{n-1}e^{\alpha x} + \cdots + a_{n-2}D^2e^{\alpha x} + a_{n-1}De^{\alpha x} + a_ne^{\alpha x} &(6)\end{aligned}$$

$[D^ke^{\alpha x} = (e^{\alpha x})^{(k)} = \alpha^ke^{\alpha x}$ であるから$]$

$$\begin{aligned}&= a_0\alpha^ne^{\alpha x} + a_1\alpha^{n-1}e^{\alpha x} + \cdots + a_{n-2}\alpha^2e^{\alpha x} + a_{n-1}\alpha e^{\alpha x} + a_ne^{\alpha x} &(7)\\ &= (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-2}\alpha^2 + a_{n-1}\alpha + a_n)e^{\alpha x} &(8)\\ &= F(\alpha)e^{\alpha x} &(9)\end{aligned}$$

(2) 簡単な場合から．$F(t) = t^k$ $(k \geq 1)$ のとき,

$$F(D)(e^{\alpha x}y) = D^k(e^{\alpha x}y) \tag{10}$$

[ライプニッツの公式 (積の微分法の高階化) より]

$$= \sum_{i=0}^{k} {}_kC_i (D^i e^{\alpha x})(D^{k-i} y) = \sum_{i=0}^{k} {}_kC_i (\alpha^i e^{\alpha x})(D^{k-i} y) \tag{11}$$

$$= e^{\alpha x} \left\{ \sum_{i=0}^{k} {}_kC_i \alpha^i D^{k-i} \right\} y = e^{\alpha x}(D+\alpha)^k y = e^{\alpha x} F(D+\alpha) y \tag{12}$$

となる. 一般に $F(t)$ が式 (2) と同じもののとき,

$$F(D)(e^{\alpha x} y) = \left( \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} \right)(e^{\alpha x} y) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} (e^{\alpha x} y) \tag{13}$$

[直前の簡単な場合の結果より]

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i e^{\alpha x} (D+\alpha)^{n-i} y = e^{\alpha x} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i (D+\alpha)^{n-i} \right\} y = e^{\alpha x} F(D+\alpha) y \tag{14}$$

となる. □

**例 4.4** (1) $(D^2 + D - 2)e^{4x} = (4^2 + 4 - 2)e^{4x} = 18e^{4x}$
(2) $(D^2 + D - 2)(e^{3x} x^2) = e^{3x}\{(D+3)^2 + (D+3) - 2\}x^2 = e^{3x}(D^2 + 7D + 10)x^2 = e^{3x}(2 + 14x + 10x^2)$

**練習 4.5** 上の例に倣って次を計算せよ.
(1) $(D^2 + 5D - 6)e^{2x}$　　(2) $(D^2 + 5D - 6)(e^x \sin x)$　　(3) $(D^2 + 5D - 6)(e^{2x} \sin x)$

## 4.2　$F(D)y = 0$ の一般解

**定理 4.6 (定理 5.4.2)**
$n$ 階の微分方程式

$$(D - \alpha)^n y = 0 \tag{15}$$

の一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}) e^{\alpha x} \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ は任意定数}) \tag{16}$$

で与えられる. 特に $D^n y = 0$ の一般解は $y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$ である.

【証明】定理 4.3 より

$$0 = (D-\alpha)^n y = (D-\alpha)^n (e^{\alpha x} \cdot e^{-\alpha x} y) = e^{\alpha x}\{(D+\alpha) - \alpha\}^n (e^{-\alpha x} y) = e^{\alpha x} D^n (e^{-\alpha x} y) \tag{17}$$

となる. $e^{\alpha x} > 0$ より $D^n(e^{-\alpha x} y) = (e^{-\alpha x} y)^{(n)} = 0$. 積分を $n$ 回繰り返せば, ある定数 $c_1, \ldots, c_n$ があって

$$e^{-\alpha x} y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1} \tag{18}$$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}) e^{\alpha x} \tag{19}$$

□

**補注.** 一般解の形より, $(D-\alpha)^n y = 0$ の解の基底として $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x}$ が取れる.

**補注.** $n = 1$ のときの定理の主張は「$(D-\alpha)y = 0$ の一般解は $y = c_1 e^{\alpha x}$ である」となる. $(D-\alpha)y = 0$ は 1 階の斉次線形微分方程式 $y' - \alpha y = 0$ であり, その一般解がこうなることは既習事項である.

**例 4.7** $y''' + 3y'' + 3y' + y = (D+1)^3 y = 0$ の一般解は, $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x}$ ($c_1, c_2, c_3$ は任意定数).

**定理 4.8 (定理 5.4.3)**

$b^2 - 4c < 0$ のとき, $2n$ 階の微分方程式

$$(D^2 + bD + c)^n y = 0 \tag{20}$$

の一般解は

$$y = (A_1 + A_2 x + \cdots + A_n x^{n-1})e^{\lambda x}\cos\mu x \ + \ (B_1 + B_2 x + \cdots + B_n x^{n-1})e^{\lambda x}\sin\mu x \tag{21}$$

$(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ は任意定数)

で与えられる. ただし, 2 次方程式 $t^2 + bt + c = 0$ の二つの解を $\lambda \pm \mu i$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$) とする.

**系 4.9 (系 5.4.4)**

$b^2 - 4c < 0$ のとき, 2 階の微分方程式

$$(D^2 + bD + c)y = y'' + by' + cy = 0 \tag{22}$$

の一般解は

$$y = Ae^{\lambda x}\cos\mu x \ + \ Be^{\lambda x}\sin\mu x \qquad (A, B \text{ は任意定数}) \tag{23}$$

で与えられる. ただし, 特性方程式 $t^2 + bt + c = 0$ の二つの解を $\lambda \pm \mu i$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$) とする.

**例 4.10** $(D^2 + 4)y = y'' + 4y = 0$ とする. 特性方程式 $t^2 + 4 = 0$ の解は $t = \pm 2i = 0 \pm 2i$. よって, 一般解は $y = Ae^{0x}\cos 2x + Be^{0x}\sin 2x = A\cos 2x + B\sin 2x$ ($A, B$ は任意定数).

**例 4.11** $(D^2 + 4)^2 y = 0$ の一般解は, $y = (A_1 + A_2 x)\cos 2x + (B_1 + B_2 x)\sin 2x$ ($A_1, A_2, B_1, B_2$ は任意定数).

**4.12** 実数を係数とする任意の $n$ 次多項式 $F(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$ は, 次のように 1 次と 2 次の実数係数多項式の積に因数分解される:

$$\begin{aligned} F(t) =& (t - \alpha_1)^{m_1}(t - \alpha_2)^{m_2} \cdots (t - \alpha_k)^{m_k} \\ & \times (t^2 + p_1 t + q_1)^{n_1}(t^2 + p_2 t + q_2)^{n_2} \cdots (t^2 + p_\ell t + q_\ell)^{n_\ell} \end{aligned} \tag{24}$$

ただし, $\alpha_j, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $p_i \neq p_j$ または $q_i \neq q_j$ $(i \neq j)$, $m_1 + \cdots + m_k + 2(n_1 + \cdots + n_\ell) = n$.

**定理 4.13 (定理 5.4.5)**

$n$ 階の微分方程式 $F(D)y = 0$ の特性多項式 $F(t)$ が式 (24) のとき, $F(D)y = 0$ の一般解は

$$\begin{aligned} y =& \sum_{j=1}^{k} \left( A_1^{(j)} + A_2^{(j)} x + \cdots + A_{m_j}^{(j)} x^{m_j - 1} \right) e^{\alpha_j x} \\ & + \sum_{j=1}^{\ell} \left\{ \left( B_1^{(j)} + B_2^{(j)} x + \cdots + B_{n_j}^{(j)} x^{n_j - 1} \right) e^{\lambda_j x}\cos\mu_j x + \left( C_1^{(j)} + C_2^{(j)} x + \cdots + C_{n_j}^{(j)} x^{n_j - 1} \right) e^{\lambda_j x}\sin\mu_j x \right\} \end{aligned} \tag{25}$$

$(A_s^{(j)}, B_s^{(j)}, C_s^{(j)}$ たちは総計 $n$ 個の任意定数)

で与えられる. ただし, 特性方程式 $t^2 + p_j t + q_j = 0$ の二つの解を $\lambda_j \pm \mu_j i$ ($\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j \neq 0$) とする.

**例 4.14** 8 階の微分方程式 $(D-2)(D+1)^3(D^2+4)^2y=0$ の一般解は

$$y=A_1^{(1)}e^{2x}+\big(A_1^{(2)}+A_2^{(2)}x+A_3^{(2)}x^2\big)e^{-x}+\Big\{\big(B_1^{(1)}+B_2^{(1)}x\big)\cos 2x+\big(C_1^{(1)}+C_2^{(1)}x\big)\sin 2x\Big\} \tag{26}$$

注意. 3 つの微分方程式 $(D-2)y=0,\ (D+1)^3y=0,\ (D^2+4)^2y=0$ の一般解の和を取れば良いということ.
注意. 任意定数の記号は今は定理のものに合わせたが, 前から順に $C_1,C_2,\dots,C_8$ と振っても良い:

$$y=C_1e^{2x}+\big(C_2+C_3x+C_4x^2\big)e^{-x}+\Big\{\big(C_5+C_6x\big)\cos 2x+\big(C_7+C_8x\big)\sin 2x\Big\} \tag{27}$$

**系 4.15**
2 階の定数係数斉次線形微分方程式 $y''+by'+cy=0$ の一般解は, その特性方程式 $F(t)=t^2+bt+c=0$ の解によって次の 3 通りとなる. (いずれも $C_1,C_2$ は任意定数.)
(1) $F(t)=0$ がふたつの実数解 $t=\lambda_1,\lambda_2$ をもつときは, $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

(2) $F(t)=0$ が実重解 $t=\lambda$ をもつときは, $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$.

(3) $F(t)=0$ が共役複素数解 $t=\lambda\pm\mu i$ をもつときは, $y=e^{\lambda x}(C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x)$.

**例 4.16** 以下, $C_1,C_2$ は任意定数とする.

(1) $y''+y'-2y=0$ の一般解は $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. $\quad(t^2+t-2=(t-1)(t+2)$ より$)$

(2) $y''+2y'+y=0$ の一般解は $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$. $\quad(t^2+2t+1=(t+1)^2$ より$)$

(3) $y''+y'+y=0$ の一般解は $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.
$(t^2+t+1=0$ の解は $t=(-1\pm\sqrt{3}i)/2$ より$)$

**演習問題**
※以下, $x$ は独立変数, $y=y(x)$ は未知関数, $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 等である.

4-1. 次の定数係数斉次線形微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y''+5y'-6y=0$

(2) $y''-y'=0$

(3) $y''+4y'+4y=0$

(4) $y''-2y'+5y=0$

(5) $y''-2y'+10y=0$

(6) $2y''+y'-7y=0$

(7) $5y''+2y'+3y=0$

(8) $16y''-\pi^2y=0$

(9) $y''+9y=0$

(10) $y''-2\sqrt{2}y'+2y=0$

(11) $y''+(\sqrt{3}-1)y'-\sqrt{3}y=0$

(12) $y^{(3)}+6y''-32y=0$

(13) $y^{(3)}+y''-16y'+20y=0$

(14) $y^{(4)}+5y^{(3)}+12y''+13y'+5y=0$

## 5 定数係数非斉次線形微分方程式

次の形の方程式を $n$ **階定数係数非斉次線形微分方程式**という:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x) \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ は定数}, a_0 \neq 0, \varphi(x) \not\equiv 0). \tag{1}$$

斉次方程式のときと同様, 微分演算子 $D$ を用いて $F(D)y = \varphi(x)$ と表そう. この非斉次方程式の一般解は, $F(D)y = \varphi(x)$ の特殊解 $u_0(x)$ と斉次方程式 $F(D)y = 0$ の解の基底 $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ を用いて

$$y = u_0(x) + c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) \quad (c_i \text{ は任意定数}) \tag{2}$$

と表せる (既習). また, $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ の求め方も既習なので, 今回は $u_0(x)$ を調べる.

### 5.1 逆演算子

$F(D)$ を微分演算子とするとき $F(D)y = \varphi(x)$ の特殊解を

$$y = \frac{1}{F(D)}\varphi(x) \quad \text{または} \quad y = F(D)^{-1}\varphi(x) \tag{3}$$

と書く. (補注: 解の内のひとつをとにかくこのように表すことにする.) 定義より

$$F(D)\frac{1}{F(D)}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{4}$$

が成り立つ.

例えば $F(D) = D$ の場合, $Dy = \varphi(x)$ は $y' = \varphi(x)$ を意味するので, $\varphi(x)$ の原始関数が特殊解となる. よって,

$$\frac{1}{D}\varphi(x) = \int \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

ただし, 右辺は $\varphi(x)$ の原始関数のひとつを表すものとする.
補注: 教科書では, 下端 0 の不定積分を原始関数として選び, $\frac{1}{D}\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ のようにしている.

**命題 5.1**
微分演算子 $F(D), G(D)$ に対して次が成り立つ.

$$\frac{1}{F(D)G(D)} = \frac{1}{F(D)}\frac{1}{G(D)} = \frac{1}{G(D)}\frac{1}{F(D)} \tag{6}$$

### 5.2 $F(D)y = \varphi(x)$ の特殊解

A. $\varphi(x)$ が多項式の場合

**定理 5.2 (定理 5.4.6)**
$F(t)$ と $p(x)$ を 0 でない多項式とする. このとき, ある多項式 $q(x), r(x)$ が存在して,

$$p(x) = F(D)q(x) + r(x) \quad \text{かつ} \quad \deg r(x) < \deg p(x) \tag{7}$$

となる. ただし, deg は多項式の次数 (degree) を表し, $\deg 0 = -\infty$ と約束する.
意味: 多項式 $p(x)$ を $F(D)$ で “割る”ことができる. $q(x)$ が “商”で $r(x)$ が “余り”.

$F(D)y = \varphi(x)$ の特殊解 $\frac{1}{F(D)}\varphi(x)$ を求めるには, 多項式 $\varphi(x)$ を $F(D)$ で "割る"ことによって求められる. ただし, 最終的に "余り"が 0 になるまで繰り返し (補注: 上の定理よりいつか必ず 0 になる), その時の "商"が特殊解となる.

**例 5.3** (1) $(D^2 - D + 2)y = x^2 + x$ の特殊解を求めると, $\frac{1}{2}x^2 + x$.
(2) $(D^2 + D)y = x^2 + x$ の特殊解を求めると, $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.

**練習 5.4** 次の計算をせよ. (1) $\dfrac{1}{D^2 - D - 2}(x+1)$ (2) $\dfrac{1}{D^2 - 2D - 3}(x^2)$

B. $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ または $\varphi(x) = (\text{多項式}) \times e^{\alpha x}$ の場合

**定理 5.5**
一般に $F(t)$ を多項式, $\alpha$ を定数, $y$ を関数とすれば, 次が成り立つ.
(1) $F(\alpha) \neq 0$ なら $\dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \dfrac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x}$.
(2) $\dfrac{1}{F(D)}(e^{\alpha x}y) = e^{\alpha x}\dfrac{1}{F(D+\alpha)}y$. 特に $y = 1$ とすれば, $\dfrac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\dfrac{1}{F(D+\alpha)}1$.

例題. 教科書 p.218〜219 のものを扱う.

C. $\varphi(x) = \cos bx, \sin bx$ $(b \in \mathbb{R})$ の場合

準備 1. 複素数値関数の微分.

複素数に値を取る関数 (**複素数値関数**) $f(x)$ を考える. ただし, $x$ は実数. $f(x)$ はふたつの実数値関数 $u(x), v(x)$ を用いて $f(x) = u(x) + iv(x)$ と表せる. $u(x), v(x)$ がともに微分可能のとき, $f(x)$ は微分可能であるという. このとき, $f(x)$ の導関数を $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ と定義する. この導関数もまた複素数値関数である. 以下同様に高階導関数も定義される. $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ たちの線形和で作られる微分演算子 $F(D)$ を複素数値関数 $f(x)$ に施す $F(D)f(x)$ も, 実数値関数の場合と同様に定義される.

準備 2. 複素指数関数 $e^z$, 特に $e^{\alpha x}$.

$z = \tau + i\theta$ $(\tau, \theta \in \mathbb{R})$ に対して, **複素指数関数** $e^z$ を

$$e^z = e^{\tau + i\theta} = e^{\tau}e^{i\theta} = e^{\tau}(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{8}$$

と定める. 特に $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ に対し, 準備 1 の $f(x)$ の一例となる $e^{\alpha x}$ を次のように定義する:

$$e^{\alpha x} = e^{(ax)+i(bx)} = e^{ax}e^{i(bx)} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx). \tag{9}$$

この複素数値関数の導関数は $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ となる (cf. テキスト p.208). よって, 高階導関数も実数値関数の場合と同様に $(e^{\alpha x})^{(k)} = \alpha^k e^{\alpha x}$ となる. それゆえ, これまでに取り扱った $e^{\alpha x}$ に関する公式 (例えば定理 5.5 など) は $\alpha \in \mathbb{C}$ の場合もすべてそのまま成り立つ.

補注. 式 (8) において $\tau = 0$ とすれば, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$. これは**オイラーの公式**と呼ばれる. $i\theta$ を共役複素数 $-i\theta$ に置き換えると, $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ となる. よって,

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{10}$$

が成り立つ. ただし, 複素数 $z$ の実部と虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$ と表す.

**定理 5.6 (定理 5.4.8)**

$F(t)$ を実数係数多項式, $c(x), s(x)$ を実数値関数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\dfrac{1}{F(D)}c(x) = \dfrac{1}{F(D)}\left[\mathrm{Re}\{c(x)+is(x)\}\right] = \mathrm{Re}\left[\dfrac{1}{F(D)}\{c(x)+is(x)\}\right]$

(2) $\dfrac{1}{F(D)}s(x) = \dfrac{1}{F(D)}\left[\mathrm{Im}\{c(x)+is(x)\}\right] = \mathrm{Im}\left[\dfrac{1}{F(D)}\{c(x)+is(x)\}\right]$

特殊解の求め方: Case B の方法で $\dfrac{1}{F(D)}e^{i(bx)}$ を求め (補注: $\alpha = ib$ である), コサインの場合はその実部, サインの場合はその虚部を見てやれば良い.

例題. 教科書 p.220〜221 のものを扱う.

**演習問題**

※以下, $x$ は独立変数, $y = y(x)$ は未知関数, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 等である.

5-1. 次の定数係数非斉次線形微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - 4y' + 4y = x + 1$

(2) $y'' - 2y' + 2y = x^2 + 2x - 1$

(3) $y'' + y' = x$

(4) $y'' - 7y' = -14x^2$

5-2. 次の定数係数非斉次線形微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + 3y' + 2y = e^x$

(2) $y'' + 5y' + 7y = e^{-2x}$

(3) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$

(4) $y'' - 4y' + 13y = xe^{2x}$

(5) $y'' - 7y' + 12y = 2xe^{2x}$

(6) $y'' - 7y' + 12y = 2xe^{3x}$

5-3. 次の定数係数非斉次線形微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - 4y = \cos x$

(2) $y'' - 4y = \sin x$

(3) $y'' + 25y = \cos(5x)$

(4) $y'' + 25y = \sin(5x)$

(5) $y'' + 2y' - y = \cos x$

(6) $y'' + 2y' - y = \sin x$

(7) $y'' - y' + 9y = xe^x \cos(3x)$

(8) $y'' - y' + 9y = xe^x \sin(3x)$