平面の方程式

定理 0.1

xyz 空間内において, 定点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通りベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に垂直な平面 h の方程式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

で与えられる.

【証明】空間内の不定点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\text{ は } h \text{ 上の点である} &\Leftrightarrow \boldsymbol{n} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \text{ は垂直, または } \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{n} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{P_0P}} \text{ の内積が } 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

□

定義. 式 (1) は

$$ax + by + cz = d \quad (a, b, c, d \text{ は定数}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)) \tag{2}$$

と, x, y, z **の 1 次方程式**の形に整理できる. 任意の平面は必ず式 (2) の形で表せ, **平面の方程式の一般形**という.

補注. 表し方は一意的ではない. 例えば, $x + y + z = 1$ と $-x - y - z = -1$ はまったく同じ平面を表す.

補注. xy 平面においては, x, y の 1 次方程式

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ は定数}, (a, b) \neq (0, 0)) \tag{3}$$

は直線を表す (直線の方程式の一般形). 一方, xyz 空間内で式 (3) を考えれば, それは平面を表す.
このように, 方程式だけで図形を判断することはできない. 置かれている状況によって変わるので気を付けよ.

例 1. 定点 $\mathrm{P}_0(1, 2, -3)$ を通りベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ に垂直な平面の方程式 $ax + by + cz = d$ を求めよ.

例 2. 平面 $x + y + 2z = 2$ の図を描け. (ただし, $x, y, z \geq 0$ としてよい)

定理 0.2

xyz 空間内の任意の点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ から平面 $ax + by + cz = d$ までの距離 D は

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4}$$

で与えられる. 特に, 原点 O からの距離は以下のようになる:

$$\frac{|a0 + b0 + c0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{5}$$

例 3. 平面 $x + y + 3z = 2$ について, (i) 原点からの距離を求めよ (ii) 点 $(-1, 2, -5)$ からの距離を求めよ.