■機械系数学　演習問題 No.2　微分方程式の基礎・変数分離形 (1)　(担当: 谷戸)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' = x^2 + x + 1$

(2) $y'' = e^{2x} + \sin x$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x^2 + 1)y' = 4x$

(2) $\dfrac{y'}{x} = \cos x$

3. 次の微分方程式は変数分離形である．一般解を求めよ．

(1) $y' = 3y$

(2) $y' = 2xy$

学科　　　　　　　番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.2　微分方程式の基礎・変数分離形 (1)　(担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $y'' = x^2 + x + 1$ より

$$\begin{aligned} y' &= \int (x^2 + x + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C_1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C_1 \right) dx \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

(2) $y'' = e^{2x} + \sin x$ より

$$\begin{aligned} y' &= \int (e^{2x} + \sin x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1 \right) dx \\ &= \frac{1}{4}e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

2. (1) $(x^2 + 1)y' = 4x$ より $y' = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$. よって,

$$y = \int \frac{4x}{x^2 + 1}\, dx$$

[$t = x^2 + 1$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = (x^2 + 1)' = 2x$ なので, $dt = 2x\, dx$.]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{2}{x^2 + 1} \cdot 2x\, dx \\ &= \int \frac{2}{t}\, dt \\ &= 2\log|t| + C \\ &= 2\log|x^2 + 1| + C \\ &= 2\log(x^2 + 1) + C \quad (\text{注: } x^2 + 1 > 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{y'}{x} = \cos x$ より $y' = x\cos x$. よって,

$$\begin{aligned} y &= \int x\cos x\, dx \\ &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx \\ &= x\sin x - \int \sin x\, dx \\ &= x\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

3. (1) $y' = 3y$ より, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3$. 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{y}\frac{dy}{\cancel{dx}}\, \cancel{dx} = \int 3\, dx \\ &\log|y| = 3x + C \\ &|y| = e^{3x+C} = e^C \cdot e^{3x} \\ &y = \pm e^C \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

$A = \pm e^C$ とおけば, 一般解は $y = Ae^{3x}$ (A は任意定数).

(2) $y' = 2xy$ より, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$. 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\frac{dy}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int 2x\,dx \\
&\log|y| = x^2 + C \\
&|y| = e^{x^2+C} = e^C \cdot e^{x^2} \\
&y = \pm e^C \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

$A = \pm e^C$ とおけば, 一般解は $y = Ae^{x^2}$ (A は任意定数).