■機械系数学　演習問題 No.3　変数分離形 (2)　(担当: 谷戸)

1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．さらに, 与えられた初期条件の下での特殊解を求めよ．

(1) $y' = 2x, \quad y(0) = 1$

(2) $y'' = g$ (ただし, g は定数), $\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

2. 次の初期値問題を解け．

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}, \quad y(1) = \sqrt{3}$

(2) $xy' + y = 0, \quad y(2) = -2$

3. $u = \frac{y}{x}$ とおいて変数分離形に帰着させて一般解を求めよ．

$xy' = x + 2y$

学科　　　　　　番号　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.3　変数分離形 (2)　(担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $y' = 2x$ より, 一般解は

$$y = \int 2x \, dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

である. 初期条件 $x = 0$, $y = 1$ を代入すると,

$$1 = 0^2 + C \quad \therefore C = 1$$

よって, 初期条件の下での特殊解は $y = x^2 + 1$.

(2) $y'' = g$ より

$$\begin{aligned} y' &= \int g \, dx = gx + C_1, \\ y &= \int (gx + C_1) \, dx = \frac{1}{2}gx^2 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

初期条件を用いると $C_1 = C_2 = 0$ となることが分かるので, 初期条件の下での特殊解は $y = \dfrac{1}{2}gx^2$.

2. (1) $y' = -\dfrac{x}{y}$ より $yy' = -x$. 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} &\int y \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int (-x) \, dx \\ &\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \\ &x^2 + y^2 = 2C \\ &x^2 + y^2 = A \quad (A \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$x = 1$, $y = \sqrt{3}$ より $A = 4$.

よって, 初期条件の下での特殊解は $x^2 + y^2 = 4$.

(2) $xy' + y = 0$ より $xy' = -y$ となり, $\dfrac{1}{y}y' = -\dfrac{1}{x}$ となる. 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{y} \frac{dy}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx \\ &\log|y| = -\log|x| + C \\ &\log|y| + \log|x| = C \\ &\log|xy| = C \\ &|xy| = e^C \\ &xy = \pm e^C \\ &xy = A \\ &y = \frac{A}{x} \quad (A \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$x = 2$, $y = -2$ より $A = -4$.

よって, 初期条件の下での特殊解は $y = -\dfrac{4}{x}$.

3. 与式 $xy' = x + 2y$ に $\frac{1}{x}$ を掛けると, $y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$ となる.

$u = \frac{y}{x}$ とおく. このとき $y = ux$ で, 両辺を x について微分すると, 積の微分法より $y' = u'x + u$.

これらを微分方程式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} &u'x + u = 1 + 2u \\ &u'x = 1 + u \\ &\frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となる (変数分離形に帰着). これを解くと

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+u}\frac{du}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int \frac{1}{x}\,dx \\
&\log|1+u| = \log|x| + C \\
&\log|1+u| - \log|x| = C \\
&\log\left|\frac{1+u}{x}\right| = C \\
&\left|\frac{1+u}{x}\right| = e^C \\
&\frac{1+u}{x} = \pm e^C \\
&u = \pm e^C x - 1 \\
&u = Ax - 1
\end{aligned}
$$

となる. よって, 一般解は

$$
y = ux = Ax^2 - x \quad (A \text{ は任意定数})
$$

となる.