

■機械系数学 演習問題 No.4 変数分離形の応用 (担当: 谷戸)

問題.  $90^{\circ}\text{C}$  のコーヒーを室温  $10^{\circ}\text{C}$  の部屋に 3 分間放置すると,  $70^{\circ}\text{C}$  になった (注: 実際の実験による数値ではありません). さらに 3 分間放置するとコーヒーは何度になるか求めよ.

ヒントおよび解法の手順.

ニュートンの冷却の法則.

実験によると, 物体の温度  $y = y(t)$  の時間的変化率  $\frac{dy}{dt}$  は, 温度  $y$  と周囲の温度  $y_0$  の差に比例する.

- 時刻を  $t$  (単位: 分) とする.
- 時刻  $t$  におけるコーヒーの温度を  $y = y(t)$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) とする.
- コーヒーを部屋に運び入れた時刻を  $t = 0$  とする.
- 比例定数を  $k$  とする.

- (1) 微分方程式を立てよ. 境界条件はどうなるか.
- (2) 一般解を求めよ.
- (3) 境界条件を用いて, コーヒーの温度を表す関数  $y = y(t)$  を求めよ.
- (4) コーヒーの問題に解答を与えよ.

(1)

$$\frac{dy}{dt} = k(y - y_0)$$

境界条件は  $y(0) = 90, y(3) = 70$ .

(2)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= k(y - y_0) \\ \frac{dy}{dt} &= k(y - 10) \\ \frac{1}{y - 10} \frac{dy}{dt} &= k \\ \int \frac{1}{y - 10} \frac{dy}{dt} dt &= \int k dt \\ \log |y - 10| &= kt + C \\ |y - 10| &= e^{kt+C} = e^{kt} e^C \\ y - 10 &= \pm e^C e^{kt} \\ \therefore y &= A e^{kt} + 10 \quad (A \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

(3) 境界条件  $y(0) = 90, y(3) = 70$  を一般解に代入すると

$$\begin{cases} 90 = A + 10 \\ 70 = A e^{3k} + 10 \end{cases}$$

となるので、第1式より  $A = 80$ . これを第2式に代入すると  $70 = 80e^{3k} + 10$  となり、 $e^{3k} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ . これより  $e^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ . (補注: 比例定数  $k$  は  $k = \frac{1}{3} \log \frac{3}{4}$  と求まる.) したがって、求める関数は

$$y = A(e^k)^t + 10 = 80 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{3}} + 10$$

となる.

(4) (3) の関数に  $t = 6$  を代入すればよい.

$$\begin{aligned} y &= 80 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{3}} + 10 \\ &= 80 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 10 \\ &= 80 \cdot \frac{9}{16} + 10 \\ &= 55 \end{aligned}$$

答え : 55°C