■機械系数学　演習問題 No.5　1 階線形微分方程式　(担当: 谷戸)

1. 公式を用いて, 1 階同次線形微分方程式の一般解を求めよ. さらに, 初期条件の下での特殊解も求めよ.

(1) $y' + 6y = 0,\ y(0) = 1$

(2) $y' - \frac{2y}{x} = 0,\ y(2) = 12$

2. 公式を用いて, 1 階非同次線形微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' - y = 1$

(2) $y' + 2y = e^{-2x} \cos x$

(3) $y' + y = x$

学科　　　　　　　番号　　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.5　1 階線形微分方程式　(担当: 谷戸) 【解答】

問 1 の 1 階同次線形微分方程式は $y' + p(x)y = 0$ の形.

問 2 の 1 階非同次線形微分方程式は $y' + p(x)y = q(x)$ の形. 以下, A, B, C 等は任意定数を表す.

1. (1) 答え: 一般解 $y = Ae^{-6x}$, 特殊解 $y = e^{-6x}$.

   $y' + 6y = 0$ に対しては $p(x) = 6$ より

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int 6\,dx = 6x$$

   となるので, 一般解は

$$y = Ae^{-P(x)} = Ae^{-6x}$$

   となる. 初期条件 $y(0) = 1$ より $x = 0$, $y = 1$ を代入すると $A = 1$ を得るので, 特殊解は $y = e^{-6x}$.

   (2) 答え: 一般解 $y = Ax^2$, 特殊解 $y = 3x^2$.

   $y' - \frac{2y}{x} = 0$ に対しては $p(x) = -\frac{2}{x}$ より

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int \left(-\frac{2}{x}\right)\,dx = -2\log|x|$$

   となるので, 一般解は

$$y = Ae^{-P(x)} = Ae^{2\log|x|} = Ae^{\log(x^2)} = Ax^2$$

   となる. 初期条件 $y(2) = 12$ より $x = 2$, $y = 12$ を代入すると $A = 3$ を得るので, 特殊解は $y = 3x^2$.

2. (1) 答え: 一般解 $y = -1 + Ce^x$.

   $y' - y = 1$ より $p(x) = -1$, $q(x) = 1$.

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int (-1)\,dx = -x$$

   一般解は

$$\begin{aligned}
y &= e^{-P(x)}\left[\int q(x)\cdot e^{P(x)}\,dx\right] \\
&= e^{-(-x)}\left[\int 1\cdot e^{-x}\,dx\right] \\
&= e^{x}\left[\int e^{-x}\,dx\right] \\
&= e^{x}\left(-e^{-x} + C\right) \\
&= -1 + Ce^{x}
\end{aligned}$$

   (2) 答え: 一般解 $y = e^{-2x}(\sin x + C)$.

   $y' + 2y = e^{-2x}\cos x$ より $p(x) = 2$, $q(x) = e^{-2x}\cos x$.

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

   一般解は

$$\begin{aligned}
y &= e^{-P(x)}\left[\int q(x)\cdot e^{P(x)}\,dx\right] \\
&= e^{-2x}\left[\int e^{-2x}\cos x\cdot e^{2x}\,dx\right] \\
&= e^{-2x}\left[\int \cos x\,dx\right] \\
&= e^{-2x}(\sin x + C)
\end{aligned}$$

(3) 答え: 一般解 $y = x - 1 + Ce^{-x}$.

$y' + y = x$ より $p(x) = 1$, $q(x) = x$.

$$P(x) = \int p(x)\,dx = \int 1\,dx = x$$

一般解は

$$\begin{aligned} y &= e^{-P(x)} \left[\int q(x) \cdot e^{P(x)}\,dx \right] \\ &= e^{-x} \left[\int x \cdot e^{x}\,dx \right] \end{aligned}$$

［部分積分法］

$$\begin{aligned} &= e^{-x} \left[xe^{x} - \int e^{x}\,dx + C \right] \\ &= e^{-x} \left(xe^{x} - e^{x} + C \right) \\ &= x - 1 + Ce^{-x} \end{aligned}$$