■機械系数学　演習問題 No.6　同次線形微分方程式の解の基底　(担当: 谷戸)

1. 以下の 2 階の同次線形微分方程式について, y_1, y_2 が解の基底 (基本解) であることを示せ.

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$

(2) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y_1 = e^x \cos x,\ y_2 = e^x \sin x$

学科　　　　　　　番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.6　同次線形微分方程式の解の基底　(担当: 谷戸)【解答】

1. (1) $y_1 = e^x$ より $y_1' = e^x$, $y_1'' = e^x$ となるので,

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$$

となる．よって, y_1 は解である．また, $y_2 = e^{2x}$ より $y_2' = 2e^{2x}$, $y_2'' = 4e^{2x}$ となるので,

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$$

となる．よって, y_2 も解である．ここで, $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x \neq (\text{定数})$ より y_1, y_2 は 1 次独立である．
したがって, y_1, y_2 は解の基底である．

(2) $y_1 = e^x \cos x$ に積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} y_1' &= (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \end{aligned}$$

となる．これをさらに微分すると

$$\begin{aligned} y_1'' &= (e^x \cos x)' - (e^x \sin x)' \\ &= (e^x \cos x - e^x \sin x) - (e^x \sin x + e^x \cos x) \\ &= -2e^x \sin x \end{aligned}$$

となる．よって,

$$\begin{aligned} & y_1'' - 2y_1' + 2y_1 \\ &= (-2e^x \sin x) - 2(e^x \cos x - e^x \sin x) + 2(e^x \cos x) \\ &= -\cancel{2e^x \sin x} - \cancel{2e^x \cos x} + \cancel{2e^x \sin x} + \cancel{2e^x \cos x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．ゆえに y_1 は解である．また, $y_2 = e^x \sin x$ に積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} y_2' &= (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x \end{aligned}$$

となる．これをさらに微分すると

$$\begin{aligned} y_2'' &= (e^x \sin x)' + (e^x \cos x)' \\ &= (e^x \sin x + e^x \cos x) + (e^x \cos x - e^x \sin x) \\ &= 2e^x \cos x \end{aligned}$$

となる．よって,

$$\begin{aligned} & y_2'' - 2y_2' + 2y_2 \\ &= 2e^x \cos x - 2(e^x \sin x + e^x \cos x) + 2(e^x \sin x) \\ &= \cancel{2e^x \cos x} - \cancel{2e^x \sin x} - \cancel{2e^x \cos x} + \cancel{2e^x \sin x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．ゆえに y_2 も解である．ここで, $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\cancel{e^x} \sin x}{\cancel{e^x} \cos x} = \tan x \neq (\text{定数})$ より y_1, y_2 は 1 次独立である．
したがって, y_1, y_2 は解の基底である．