■機械系数学　演習問題 No.7　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸)

1. 以下の方程式は, 2 階の定数係数同次線形微分方程式である. 特性方程式を解いて解の基底を求め, 一般解を答えよ.

(1) $y'' + 2y' - 15y = 0$

(2) $y'' - 9y = 0$

(3) $y'' + y' = 0$

(4) $y'' + 4y' + y = 0$

(5) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(6) $y'' - 20y' + 100y = 0$

学科　　　　番号　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.7　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸) 【解答一覧】

1. (1) 答え: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

   (2) 答え: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

   (3) 答え: $y = C_1 + C_2 e^{-x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

   (4) 答え: $y = C_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

   (5) 答え: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

   (6) 答え: $y = (C_1 + C_2 x)e^{10x}$　(C_1, C_2 は任意定数)

■機械系数学　演習問題 No.7　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $y'' + 2y' - 15y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5) = 0$$

である．これより $\lambda = 3, -5$ (二つの実数解) となるので,

$$y_1 = e^{3x} \text{ と } y_2 = e^{-5x}$$

は解の基底である．したがって, 一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる．

(2) $y'' - 9y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0$$

である．これより $\lambda = \pm 3$ (二つの実数解) となるので,

$$y_1 = e^{3x} \text{ と } y_2 = e^{-3x}$$

は解の基底である．したがって, 一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる．

(3) $y'' + y' = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$$

である．これより $\lambda = 0, -1$ (二つの実数解) となるので,

$$y_1 = e^{0x} = 1 \text{ と } y_2 = e^{-x}$$

は解の基底である．したがって, 一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる．

(4) $y'' + 4y' + y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

である．これを解くと

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

(二つの実数解) となるので,

$$y_1 = e^{(-2+\sqrt{3})x} \text{ と } y_2 = e^{(-2-\sqrt{3})x}$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = C_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる.

(5) $y'' + 4y' + 4y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

である. これより $\lambda = -2$ (重解) となるので,

$$y_1 = e^{-2x} \text{ と } y_2 = xe^{-2x}$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる.

(6) $y'' - 20y' + 100y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 - 20\lambda + 100 = (\lambda - 10)^2 = 0$$

である. これより $\lambda = 10$ (重解) となるので,

$$y_1 = e^{10x} \text{ と } y_2 = xe^{10x}$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{10x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる.