■機械系数学　演習問題 No.8　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸)

1. 以下の方程式は, 2 階の定数係数同次線形微分方程式である. 特性方程式を解いて解の基底を求め, 一般解を答えよ.

(1) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(2) $y'' + 9y = 0$

(3) $y'' + \omega^2 y = 0$　(ω は実数, $\omega > 0$)

2. 次の初期値問題を解け.

$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

学科　　　　番号　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.8　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸) 【解答一覧】

1. (1) 答え: $e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$　(C_1, C_2 は任意定数)
   (2) 答え: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$　(C_1, C_2 は任意定数)
   (3) 答え: $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$　(C_1, C_2 は任意定数)
2. 答え: $y = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x)$

■機械系数学　演習問題 No.8　2 階の定数係数同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $y'' + 2y' + 5y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

である. これを解くと, 2 次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}i}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i\end{aligned}$$

となる (共役複素数解). よって,

$$y_1 = e^{-x} \cos 2x \text{ と } y_2 = e^{-x} \sin 2x$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

となる.

   (2) $y'' + 9y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

である. これを解くと, $\lambda^2 = -9$ より

$$\lambda = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}i = \pm 3i \, (= 0 \pm 3i)$$

となる (共役複素数解). よって,

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{0x} \cos 3x = \cos 3x \text{ と} \\ y_2 &= e^{0x} \sin 3x = \sin 3x \end{aligned}$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

となる.

   (3) $y'' + \omega^2 y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

である. これを解くと, $\lambda^2 = -\omega^2$ より

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\sqrt{\omega^2}i = \pm\omega i \, (= 0 \pm \omega i)$$

となる (共役複素数解). よって,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= e^{0x}\cos\omega x = \cos\omega x \text{ と} \\
y_2 &= e^{0x}\sin\omega x = \sin\omega x
\end{aligned}
$$

は解の基底である. したがって, 一般解は

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$$

となる.

2. $y'' + 4y' + 5y = 0$ の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

である. これを解くと, 2 次方程式の解の公式より

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\
&= \frac{-4 \pm \sqrt{4}i}{2} \\
&= \frac{-4 \pm 2i}{2} \\
&= -2 \pm i
\end{aligned}
$$

となる (共役複素数解). よって, 一般解は

$$y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \tag{1}$$

となる.

さて, これを微分すると, 積の微分公式より

$$
\begin{aligned}
y' =& -2e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \\
&+ e^{-2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x)
\end{aligned} \tag{2}
$$

となる. 初期条件 $y(0) = 1$ を式 (1) に, $y'(0) = 0$ を式 (2) に代入すると, 連立方程式

$$
\begin{aligned}
1 &= C_1 \\
0 &= -2C_1 + C_2
\end{aligned}
$$

を得る ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ に注意せよ). これを解くと, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. したがって, 初期条件の下での特殊解は

$$y = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$$

となる.