■機械系数学　演習問題 No.9　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸)

1. 以下の方程式は, 2 階の定数係数非同次線形微分方程式である. 一般解を求めよ.
   (1) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$　(特殊解の hint: $u = ax + b$)
   (2) $y'' - 6y' + 9y = e^{-x}$　(hint: $u = Ke^{-x}$)
   (3) $y'' + y = \sin 2x$　(hint: $u = A\cos 2x + B\sin 2x$)

学科　　　　　番号　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.9　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸)【解答一覧】

1. (1) 答え: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 2x - 4 \quad (C_1, C_2$ は任意定数$)$
   (2) 答え: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{1}{16}e^{-x} \quad (C_1, C_2$ は任意定数$)$
   (3) 答え: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x \quad (C_1, C_2$ は任意定数$)$

■機械系数学　演習問題 No.9　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (1)　(担当: 谷戸)【解答】

1. (1) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$

Step 1 : 同次方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. これを解くと, $\lambda = -1, -2$ (二つの実数解). よって, 一般解は

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

Step 2 : (1) の特殊解を求める．(1) の右辺が 1 次式なので, 特殊解を

$$u = ax + b$$

と置いてみよう．すると, $u' = a$, $u'' = 0$ となる．これらを (1) に代入すると,

$$0 + 3a + 2(ax + b) = 4x - 2$$
$$\therefore (2a)x + (3a + 2b) = 4x - 2$$

両辺の 1 次式の係数を比較すると,

$$2a = 4, \quad 3a + 2b = -2$$

これを解くと, $a = 2$, $b = -4$. したがって,

$$u = 2x - 4$$

は (1) の特殊解.
Step 3 : 以上より, (1) の一般解は

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 2x - 4 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(2) $y'' - 6y' + 9y = e^{-x}$

Step 1 : 同次方程式 $y'' - 6y' + 9y = 0$ の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. これを解くと, $\lambda = 3$ (重解). よって, 一般解は

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

Step 2 : (2) の特殊解を求める．(2) の右辺が指数関数なので, 特殊解を

$$u = Ke^{-x}$$

と置いてみよう．すると, $u' = -Ke^{-x}$, $u'' = Ke^{-x}$ となる．これらを (2) に代入すると,

$$Ke^{-x} - 6(-Ke^{-x}) + 9Ke^{-x} = e^{-x}$$
$$\therefore 16Ke^{-x} = e^{-x}$$

両辺の係数を比較すると (または両辺に e^x を掛けると),

$$16K = 1$$

これを解くと, $K = \frac{1}{16}$. したがって,

$$u = \frac{1}{16}e^{-x}$$

は (2) の特殊解.

Step 3：以上より, (2) の一般解は

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{1}{16}e^{-x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(3) $y'' + y = \sin 2x$

Step 1：同次方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$. これを解くと, $\lambda = \pm i = 0 \pm 1i$ (共役複素数解). よって, 一般解は

$$\begin{aligned} y &= e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

Step 2：(3) の特殊解を求める．(3) の右辺が三角関数なので, 特殊解を

$$u = A\cos 2x + B\sin 2x$$

と置いてみよう．すると, $u' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $u'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ となる．これらを (3) に代入すると,

$$\begin{aligned} &(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x) \\ &= \sin 2x \\ &\therefore -3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \sin 2x \end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると

$$-3A = 0, \quad -3B = 1$$

これより, $A = 0$, $B = -\frac{1}{3}$. したがって,

$$u = -\frac{1}{3}\sin 2x$$

は (3) の特殊解.

Step 3：以上より, (3) の一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$
$$(C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$