■機械系数学　演習問題 No.10　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸)

1. 以下の方程式は, 2 階の定数係数非同次線形微分方程式である. 一般解を求めよ.
   (1) $y'' + 3y' = 6x$　(特殊解の hint: $u = ax^2 + bx$)
   (2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$　(hint: $u = Kxe^x$)
   (3) $y'' + y = \sin x$　(hint: $u = x(A\cos x + B\sin x)$)

学科　　　　　　番号　　　　　　　　　　　　氏名

■機械系数学　演習問題 No.10　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸) 【解答一覧】

1. (1) 答え: $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x$　(C_1, C_2 は任意定数)
   (2) 答え: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$　(C_1, C_2 は任意定数)
   (3) 答え: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$ (C_1, C_2 は任意定数)

■機械系数学　演習問題 No.10　2 階の定数係数非同次線形微分方程式 (2)　(担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $y'' + 3y' = 6x$

Step 1：同次方程式 $y'' + 3y' = 0$ の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 + 3\lambda = 0$. これを解くと, $\lambda = 0, -3$ (二つの実数解). よって, 一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

Step 2：(1) の特殊解を求める．(1) の右辺は 1 次式なので $u = ax + b$ と置きたいところだが, このように置くと**失敗する**. (なぜなら, $u' = a$, $u'' = 0$ となるので, これらを (1) に代入すると, 左辺が $0 + 3a = 3a$ となり, x の 1 次式とならない．よって, 右辺の 1 次式 $6x$ との係数比較ができないのである.)
そこで, 特殊解の置き方に**修正を加え**,

$$u = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

と置いてみよう．すると, $u' = 2ax + b$, $u'' = 2a$ となる．これらを (1) に代入すると,

$$\begin{aligned} &2a + 3(2ax + b) = 6x \\ &\therefore (6a)x + (2a + 3b) = 6x \end{aligned}$$

両辺の 1 次式の係数を比較すると,

$$6a = 6, \quad 2a + 3b = 0$$

これを解くと, $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$. したがって,

$$u = x^2 - \frac{2}{3}x$$

は (1) の特殊解.
Step 3：以上より, (1) の一般解は

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

Step 1：同次方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解を求める．特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. これを解くと, $\lambda = 1, 2$ (二つの実数解). よって, 一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

Step 2：(2 の特殊解を求める．(2) の右辺が指数関数なので, 特殊解を $u = Ke^x$ と置きたいところだが, このように置くと**失敗する**. (なぜなら, $u = Ke^x$ は Step 1 で求めた同次方程式の一般解に含まれている ($C_1 = K$, $C_2 = 0$) ので, (2) の解にならないのである.)
そこで, 特殊解の置き方に**修正を加え**, $u = Kxe^x$ と置いてみよう．すると, $u' = Ke^x + Kxe^x$, $u'' = 2Ke^x + Kxe^x$ となる．これらを (2) に代入すると,

$$\begin{aligned} &(2Ke^x + Kxe^x) - 3(Ke^x + Kxe^x) + 2(Kxe^x) = e^x \\ &(2K - 3K)e^x + (K - 3K + 2K)xe^x = e^x \\ &\therefore -Ke^x = e^x \end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると (または両辺に $\frac{1}{e^x}$ を掛けると),

$$-K = 1 \quad \therefore K = -1$$

したがって,

$$u = -xe^x$$

は (2) の特殊解.

Step 3 : 以上より, (2) の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(3) $y'' + y = \sin x$

Step 1 : 同次方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求める. 特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$. これを解くと, $\lambda = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$ (共役複素数解). よって, 一般解は

$$\begin{aligned} y &= e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

Step 2 : (3) の特殊解を求める. (3) の右辺が三角関数なので, 特殊解を $u = A\cos x + B\sin x$ と置きたいところだが, このように置くと**失敗する**. (なぜなら, これは Step 1 で求めた同次方程式の一般解に含まれる ($C_1 = A$, $C_2 = B$) ので, (3) の解にならないのである.)

そこで, 特殊解の置き方に**修正を加え**,

$$u = x(A\cos x + B\sin x)$$

と置いてみよう. 積の微分公式を用いて微分すると

$$\begin{aligned} u' &= A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x) \\ u'' &= -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) \end{aligned}$$

となる. これらを (3) に代入して整理すると,

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

両辺の係数を比較すると

$$-2A = 1, \quad 2B = 0$$

これより, $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. したがって,

$$u = -\frac{1}{2}x\cos x$$

は (3) の特殊解.

Step 3 : 以上より, (3) の一般解は

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x \ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$