

■機械系数学 演習問題 No.11 数値的解法 (1) (担当: 谷戸)

1. 次の初期値問題の数値的解法について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 2$$

- (1) オイラー法における前進差分スキームを求めよ. ただし, 差分を h とする.
- (2) オイラー法における前進差分スキームを求めよ. ただし, 差分を $h = 0.1$ とする.
- (3) (2) の結果を用いて Y_1, Y_2, Y_3 を計算せよ (電卓可).
- (4) 復習問題. この微分方程式の一般解と特殊解を求めよ.

■機械系数学 演習問題 No.11 数値的解法 (1) (担当: 谷戸) 【解答】

1. (1) $f(x, y) = y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ である. 前進差分スキームは

$$\begin{cases} Y_0 = 2, \\ Y_{i+1} = Y_i + hY_i^2 \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

となる. もちろん, Y_i を括り出して

$$\begin{cases} Y_0 = 2, \\ Y_{i+1} = (1 + hY_i)Y_i \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

としてもよい. (注意: $f(x, y) = y^2$ は x に無関係のため, 漸化式に x_i は現れない.)

(2) 次に $h = 0.1$ とすると

$$\begin{cases} Y_0 = 2, \\ Y_{i+1} = Y_i + 0.1Y_i^2 \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

となる.

(3) この漸化式を用いて Y_3 まで求めよう.

まず, $Y_0 = 2$ より

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + 0.1Y_0^2 \\ &= 2 + 0.1 \times 2^2 \\ &= 2 + 0.4 \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

となる. 次に, $Y_1 = 2.4$ より

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + 0.1Y_1^2 \\ &= 2.4 + 0.1 \times 2.4^2 \\ &= 2.4 + 0.576 \\ &= 2.976 \end{aligned}$$

となる. 最後に, $Y_2 = 2.976$ より

$$\begin{aligned} Y_3 &= Y_2 + 0.1Y_2^2 \\ &= 2.976 + 0.1 \times 2.976^2 \\ &= 3.8616576 \end{aligned}$$

となる. よって, $Y_1 = 2.4$, $Y_2 = 2.976$, $Y_3 = 3.8616576$ である.

(4) 変数分離形である. $y'/y^2 = 1$ の両辺を x で積分すればよい.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2} dx &= \int 1 dx \\ \int y^{-2} dy &= \int 1 dx \\ \frac{1}{-2+1} y^{-2+1} &= x + C \\ -y^{-1} &= x + C \\ \frac{1}{y} &= -x - C \\ y &= \frac{1}{-x - C} \quad (\text{一般解}) \\ y &= \frac{1}{-x + \frac{1}{2}} = \frac{2}{-2x + 1} \quad (\text{特殊解}) \end{aligned}$$