

■機械系数学 演習問題 No.13 数値的解法 (3) (担当: 谷戸)

1. 次の初期値問題の数値的解法について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 2$$

差分を h とし, 2 次ルンゲ・クッタ法のスキームを求めよ. 次に $h = 0.1$ のときに, Y_1, Y_2 を計算せよ (電卓使用可).

■機械系数学 演習問題 No.13 数値的解法 (3) (担当: 谷戸) 【解答】

1. $f(x, y) = y^2, x_0 = 0, y_0 = 2.$

よって,

$$\begin{aligned} Y_0 &= 2, \\ Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{2}f(x_i, Y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, Y_i + hf(x_i, Y_i)) \\ &= Y_i + \frac{h}{2}(Y_i^2) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, Y_i + hY_i^2) \\ &= Y_i + \frac{h}{2}Y_i^2 + \frac{h}{2}(Y_i + hY_i^2)^2 \\ &= Y_i + \frac{h}{2}Y_i^2 + \frac{h}{2}(Y_i^2 + 2hY_i^3 + h^2Y_i^4) \\ &= Y_i + hY_i^2 + h^2Y_i^3 + \frac{h^3}{2}Y_i^4 \quad (i \geq 0) \end{aligned}$$

となる. ゆえに, 2次ルンゲ・クッタ法のスキームは

$$\begin{cases} Y_0 = 2, \\ Y_{i+1} = Y_i + hY_i^2 + h^2Y_i^3 + \frac{h^3}{2}Y_i^4 \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

である. (注意: $f(x, y) = y^2$ は x に無関係のため, 漸化式に x_i は現れない)

次に $h = 0.1$ とすると

$$\begin{cases} Y_0 = 2, \\ Y_{i+1} = Y_i + 0.1Y_i^2 + 0.01Y_i^3 + 0.0005Y_i^4 \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

となる. この漸化式を用いて Y_2 まで求めよう. まず, $Y_0 = 2$ より

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + 0.1Y_0^2 + 0.01Y_0^3 + 0.0005Y_0^4 \\ &= 2 + 0.1 \times 2^2 + 0.01 \times 2^3 + 0.0005 \times 2^4 \\ &= 2 + 0.4 + 0.08 + 0.008 \\ &= 2.488 \end{aligned}$$

となる. 次に, $Y_1 = 2.488$ より

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + 0.1Y_1^2 + 0.01Y_1^3 + 0.0005Y_1^4 \\ &= 2.488 + 0.1 \times 2.488^2 + 0.01 \times 2.488^3 + 0.0005 \times 2.488^4 \\ &= 3.280184124090368 \end{aligned}$$

となる. よって, $Y_1 = 2.488, Y_2 = 3.280184124090368$ である.