■機械系数学　演習問題 No.14　総合問題 (目安: 60 分, 電卓可)　(担当: 谷戸)

問 1. バケツに入った水温 10°C の水を気温 30°C の炎天下に放置したら, 8 分後に 20°C になった (注: 実際の実験による数値ではありません). さらに 16 分間放置すると水温は何度になるか求めよ.

ヒントおよび解法の手順.

ニュートンの冷却の法則. 実験によると, 物体の温度 $y = y(t)$ の時間的変化率 $\dfrac{dy}{dt}$ は, 温度 y と周囲の温度 y_0 の差に比例する.

- 時刻を t (単位: 分) とする.
- 時刻 t における水温を $y = y(t)$ (°C) とする.
- バケツを外に出した時刻を $t = 0$ とする.
- 比例定数を k とする.

(1) 微分方程式を立てよ. 境界条件はどうなるか.

(2) 一般解を求めよ.

(3) 境界条件を用いて, 水温を表す関数 $y = y(t)$ を求めよ.

(4) 水温の問題に解答を与えよ. (電卓なしでも計算できる. 小数で答えよ.)

問 2. 次の 1 階の線形微分方程式の一般解を求めよ.
$y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x}$

問 3. 次の 2 階の同次線形微分方程式の一般解を求めよ.
$y'' + 4y' + 13y = 0$

問 4. 次の 2 階の同次線形微分方程式の初期値問題を解け.
$y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 11$

問 5. 次の 2 階の非同次線形微分方程式の一般解を求めよ.
$y'' + 3y' - 4y = -8x^2 - 4x + 28$

問 6. 次の初期値問題の数値的解法について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = 4y^2, \quad y(0) = 1$$

差分を h とし, 2 次テイラー展開法のスキームを求めよ. 次に $h = 0.1$ のときに, Y_1, Y_2 を計算せよ.
ヒント: 微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

の数値的解法について, 2 次のテイラー展開法のスキームは

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i) + \frac{h^2}{2}\{f_x(x_i, Y_i) + f_y(x_i, Y_i) \cdot f(x_i, Y_i)\} \quad (i \geqq 0)$$

で与えられる.

■機械系数学　演習問題 No.14　総合問題 (目安: 60 分, 電卓可)　(担当: 谷戸)【解答】

1. (1) $\dfrac{dy}{dt} = k(y-30)$, 境界条件: $y(0) = 10$, $y(8) = 20$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = k(y-30) \\
&\frac{1}{y-30}\frac{dy}{dt} = k \\
&\int \frac{1}{y-30}\frac{dy}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = \int k\,dt \\
&\log|y-30| = kt + C \\
&|y-30| = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} \\
&y - 30 = \pm e^{C}e^{kt} \\
&\therefore y = Ae^{kt} + 30 \quad (A \text{ は任意定数})
\end{aligned}$$

(3) 境界条件 $y(0) = 10$, $y(8) = 20$ を一般解に代入すると

$$\begin{cases} 10 = A + 30 \\ 20 = Ae^{8k} + 30 \end{cases}$$

となる．第一式より $A = -20$. これを第二式に代入すると, $-20e^{8k} = 20 - 30 = -10$. よって, $e^{8k} = \frac{1}{2}$. (これより $8k = \log\frac{1}{2}$ となり, 比例定数は $k = \frac{1}{8}\log\frac{1}{2}$.) 両辺を $\frac{1}{8}$ 乗すると, $e^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$ したがって, 求める関数は

$$y = -20(e^{k})^{t} + 30 = -20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} + 30$$

となる．

(4) (3) の関数に $t = 24$ を代入すればよい．答え：27.5°C

2. $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{\cos x}{x}$. $P(x) = \int p(x)\,dx = 2\log|x| = \log(x^2)$. よって, 一般解は

$$\begin{aligned}
y &= e^{-P(x)} \times \left(\int e^{P(x)}q(x)\,dx + C\right) \\
&= e^{-\log(x^2)} \times \left(\int e^{\log(x^2)} \cdot \frac{\cos x}{x}\,dx + C\right) \\
&= \frac{1}{x^2} \times \left(\int x^2 \cdot \frac{\cos x}{x}\,dx + C\right) \\
&= \frac{1}{x^2} \times \left(\int x\cos x\,dx + C\right) \\
&= \frac{1}{x^2} \times \left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx + C\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(x\sin x + \cos x + C\right)
\end{aligned}$$

となる．ただし, C は任意定数.

3. 特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ を解くと $\lambda = -2 \pm 3i$.
よって, 一般解は $y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$. ($c_1$, c_2 は任意定数)

4. 特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ を解くと $\lambda = 2$ (重解).
よって, 一般解は $y = (c_1 + c_2x)e^{2x}$. (c_1, c_2 は任意定数)
導関数を調べると $y' = c_2e^{2x} + (c_1 + c_2x)\cdot 2e^{2x}$ (注: 積の微分を使った)
まず, $y(0) = 5$ より $5 = (c_1 + 0)e^{0} = c_1$. よって, $c_1 = 5$.
次に $y'(0) = 11$ より $11 = c_2e^{0} + (c_1 + 0)\cdot 2e^{0} = c_2 + 10$. よって, $c_2 = 1$.
ゆえに, 特殊解は $y = (5 + x)e^{2x}$.

5. 同次方程式の特性方程式 $\lambda^2+3\lambda-4=0$ を解くと $\lambda=1,-4$.
よって, 解の基底は $y_1=e^x, y_2=e^{-4x}$.
非同次方程式の特殊解 u を $u=ax^2+bx+c$ とおくと, $u'=2ax+b$, $u''=2a$.
これらを微分方程式の左辺に代入すると

$$u''+3y'-4u=\cdots=(-4a)x^2+(6a-4b)x+(2a+3b-4c)$$

となる. これが 2 次関数 $-8x^2-4x+28$ と等しいので, 連立方程式

$$-4a=-8,\quad 6a-4b=-4,\quad 2a+3b-4c=28$$

を得る. これを解くと $a=2, b=4, c=-3$.
すなわち, 特殊解は $u=2x^2+4x-3$.
したがって, 一般解は $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}+2x^2+4x-3$. ($c_1$, c_2 は任意定数)

6. $f(x,y)=4y^2$, $x_0=0$, $y_0=Y_0=1$. また, $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=8y$.

よって,

$$\begin{aligned}
Y_{i+1}&=Y_i+hf(x_i,Y_i)+\frac{h^2}{2}\{f_x(x_i,Y_i)+f_y(x_i,Y_i)\cdot f(x_i,Y_i)\}\\
&=Y_i+h(4Y_i^2)+\frac{h^2}{2}\{0+(8Y_i)\cdot(4Y_i^2)\}\\
&=Y_i+4hY_i^2+16h^2Y_i^3\quad(i\geq 0)
\end{aligned}$$

となる. ゆえに, 2 次テイラー展開法のスキームは

$$\begin{cases} Y_0=1, \\ Y_{i+1}=Y_i+4hY_i^2+16h^2Y_i^3\quad(i\geq 0)\end{cases}$$

である. (注意: $f(x,y)=y^2$ は x に無関係のため, 漸化式に x_i は現れない)
次に $h=0.1$ とすると

$$\begin{cases} Y_0=1, \\ Y_{i+1}=Y_i+0.4Y_i^2+0.16Y_i^3\quad(i\geq 0)\end{cases}$$

となる. この漸化式を用いて Y_2 まで求めよう.
まず, $Y_0=1$ より

$$\begin{aligned}
Y_1&=Y_0+0.4Y_0^2+0.16Y_0^3\\
&=1+0.4\times 1^2+0.16\times 1^3\\
&=1+0.4+0.16\\
&=1.56
\end{aligned}$$

となる. 次に, $Y_1=1.56$ より

$$\begin{aligned}
Y_2&=Y_1+0.4Y_1^2+0.16Y_1^3\\
&=1.56+0.4\times 1.56^2+0.16\times 1.56^3\\
&=3.14086656
\end{aligned}$$

となる. よって, $Y_1=1.56$, $Y_2=3.14086656$ である.