4　微分方程式で表される自然現象

4.1　放射能 (指数的崩壊)

放射能とは, 放射線を出す能力のことである.

放射性物質とは, 放射能を持つ物質の総称で, ウラン, プルトニウム, トリウムのような放射性元素や, 他の放射線にさらされることにより放射能を持つようになった (放射化) 物質をいう. 原子力施設などで発生する放射性廃棄物などはこれに当たる.

さて, 実験によれば, **放射性物質の崩壊の速さは現在の物質量に比例する**. 物質量が時間経過とともにどのように変化していくのかを詳しく知りたい.

★問 1-1. この法則を微分方程式の形に表し, それを解け. ただし, 記号は次のようにせよ.

- 時刻を t とする. (単位は秒)
- 時刻 t における物質量を $y = y(t)$ とする. このとき, 物質量の時間的変化率は $\dfrac{dy}{dt}$ で表せる.
- 比例定数を k とする.

上の比例定数 k は, 放射性物質によって定まる負の定数である. 例えばラジウム ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$ の場合, およそ

$$k = -1.4 \times 10^{-11}[s^{-1}]$$

となることが知られている.

★問 1-2. 放射性物質の**半減期**とは, 与えられた量の半分が消えてしまう時間のことである. これは放射性崩壊の過程を表す重要な量である. そこで, ラジウム ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$ の半減期を求めよ. ただし, $\log 2 = 0.693$ とする.

4.2　冷却の法則

例題. 83°C のお茶を気温 20°C の部屋に放置したら, 7 分後に 62°C になった. さらにもう 7 分間放置するとお茶は何度になるか. (注. 実際の実験による数値ではありません.)

物理的情報 (ニュートンの冷却の法則).
実験によると, 温度 $y = y(t)$ の時間的変化率 $\frac{dy}{dt}$ は, 温度 y と周囲の温度 y_0 の差に比例する.

★問 2. 以下の記号・手順の下で例題を解け.
・時刻を t (単位: 分) とする.
・時刻 t におけるお茶の温度を $y = y(t)$ (°C) とする.
・お茶を部屋に運び入れた時刻を $t = 0$ とする.
・比例定数を k とする.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式を立てよ. **境界条件**はどうなるか.
(2) 一般解を求めよ.
(3) 境界条件を用いて, お茶の温度を表す関数 $y = y(t)$ を求めよ.
(4) お茶の問題に解答を与えよ. (ヒント: 整数になる)

【解説・解答】(このページは, 自分用の乱雑なメモを少し修正しただけなので, わかりにくいところや変なミスがあるかもしれません.)

★問 1-1.

微分方程式は $\dfrac{dy}{dt} = ky$ となる (変数分離形).

$y \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int k\,dt \\
&\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt \\
&\log|y| = kt + C \\
&|y| = e^{kt+C} = e^C e^{kt} \\
&y = \pm e^C e^{kt} \\
&y = Ae^{kt} \quad (A \text{ は任意定数, ただし } A \neq 0)
\end{aligned}
$$

一方, $y = 0$ も解. よって, 条件 $A \neq 0$ は外せる.

★問 1-2.

$t = 0$ とすると, $y = Ae^0 = A$. よって, A は初期の物質量を表す. 半減期を求めるためには, $y = \frac{A}{2}$ となる t を求めればよい.

$$
\begin{aligned}
&\frac{A}{2} = Ae^{kt} \\
&\frac{1}{2} = e^{kt} \\
&kt = \log\frac{1}{2} = -\log 2 \\
&t = -\frac{\log 2}{k}
\end{aligned}
$$

今, $\log 2 = 0.693$, $k = -1.4 \times 10^{-11}$ だから,

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{0.693}{1.4 \times 10^{-11}}\,[\text{秒}] \\
&= 0.495 \times 10^{11}\,[\text{秒}] \\
&= \frac{0.495 \times 10^{11}}{60 \times 60 \times 24 \times 365}\,[\text{年}] \\
&= 1569.6347031963470319634703196347\,[\text{年}]
\end{aligned}
$$

約 1570 年！

★問 2.

(1) $\frac{dy}{dt} = k(y - 20)$, 境界条件 $y(0) = 83$, $y(7) = 62$.

(2) 一般解を求める. 変数分離形.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{y-20}\cdot\frac{dy}{dt} = k \\
&\log|y - 20| = kt + C \\
&y = Ae^{kt} + 20 \quad (A \text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

(3) 境界条件 $y(0) = 83$, $y(7) = 62$ より

$$
\begin{cases}
83 = A + 20 \\
62 = Ae^{7k} + 20
\end{cases}
$$

第一式より $A = 63$. 第二式より $42 = 63e^{7k}$ $\therefore e^{7k} = \frac{2}{3}$.

$$e^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad k = \frac{1}{7}\log\left(\frac{2}{3}\right)$$

よって, 特殊解 (お茶の温度を表す関数) は

$$y = 63e^{kt} + 20 = 63(e^k)^t + 20 = 63\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{7}} + 20$$

(4) 部屋に運び入れてから 14 分後のお茶の温度は

$$y(14) = 63\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 20 = 48 \text{ (度)}$$