微分方程式の数値的解法 (機械系数学担当: 谷戸光昭)

1　動機

微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

$$\left(\text{丁寧に書くと,}\ \frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0\right)$$

を考える. $f(x, y)$ は与えられた 2 変数関数で, $y = y(x)$ は未知関数である. また, 点 x_0 における y の値 y_0 は初期条件として与えられている.

これまでは, 未知関数 $y = y(x)$ を具体的に求めることを目的としてきた. しかし, 一般に, 微分方程式の一般解や特殊解はそんなに簡単に求められるものではない.

今回の数値的解法では, 未知関数 y を具体的に求めることを目的とはしない.

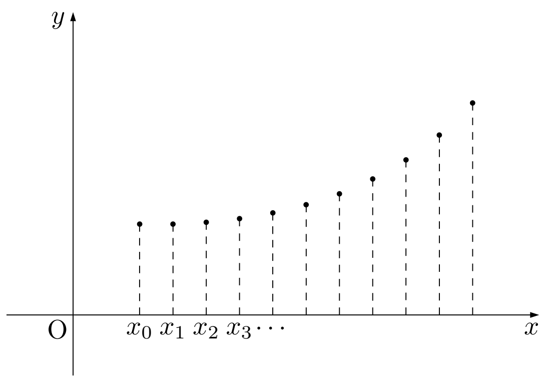
では, 何をやるのか？

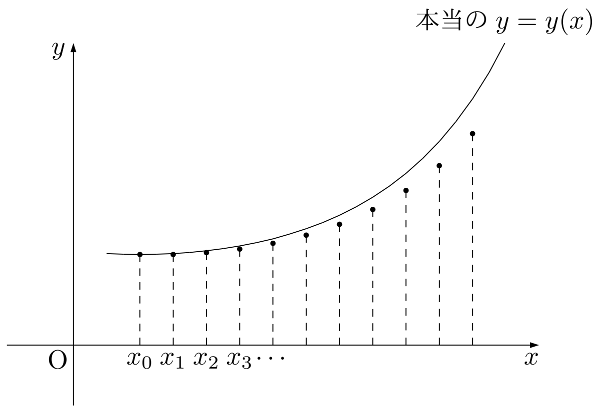
h を 0.1, 0.01, 0.000001 などの 0 に近い数とし,

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \ldots, \quad x_i = x_0 + ih, \quad \ldots \tag{2}$$

とおく. これらに対する関数値 $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_i), \ldots$ を知ることはできないだろうか？仮に真の値は不明でも, 十分精度の良い近似値を得ることが出来れば, 関数 y がほぼ分かったことになると言えるであろう.

上記のとびとびの関数値を近似的に求めることを, 初期値問題 (1) を**数値的に解く**という. この授業では, **オイラー法とルンゲ・クッタ法**を学習しよう.





2　予備知識 (1)

2.1　微分係数と関数の近似値

関数 $y = y(x)$ が点 x_0 で**微分可能**であるとは, 極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \tag{3}$$

が存在することであった. この極限値を $y(x)$ の**点 x_0 における微分係数**といい, $y'(x_0)$ と表すのであった. このとき,

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} - y'(x_0) = 0$$

より

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x_0+h)-y(x_0)-y'(x_0)h}{h}=0$$

が成り立つ．そこで, $y(x_0+h)-y(x_0)-y'(x_0)h=\varepsilon(h)$ とおくと,

$$y(x_0+h)=y(x_0)+y'(x_0)h+\varepsilon(h), \tag{4}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{h}=0 \tag{5}$$

が成り立つ．式 (5) は, $h\to 0$ のとき, 関数 $\varepsilon(h)$ は h よりもかなり小さいことを意味する．よって, 式 (4) の $\varepsilon(h)$ の項を無視すれば, $h\to 0$ のとき

$$y(x_0+h)\approx y(x_0)+y'(x_0)h \quad (\text{おおよそ等しい}) \tag{6}$$

となる．これを関数 $y(x)$ の点 x_0 の近くでの **1 次近似**という．この式を利用して, 点 x_0 の近くにおける関数値を近似的に求めることができる．

例. 指数関数 $y(x)=e^x$ の点 0 の近くでの 1 次近似

$$y(0+h)\approx y(0)+y'(0)h \tag{7}$$

を求めよう．まず, 点 0 における関数値は $y(0)=e^0=1$. また, 導関数は $y'(x)=(e^x)'=e^x$ だから, 点 0 における微分係数は $y'(0)=e^0=1$. よって, (7) より, 1 次近似は

$$e^h\approx 1+h \tag{8}$$

となる．これを用いると, 例えば

$$e^{0.1}\approx 1+0.1=1.1,$$
$$e^{0.01}\approx 1+0.01=1.01$$

などが得られる．

補注．自然対数の底 (ネピアの定数) は $e\approx 1+1=2$ と近似されるが, 実際は $e=2.71828\ldots$ であり, やや隔たりがある．これは $h=1$ が十分 0 に近いとは言えないからである．近似の精度を上げるためには, 式 (4) の $\varepsilon(h)$ をより正確に表しておく必要がある．(→テイラー展開, マクローリン展開)

練習 2-1. $y(x)=\sin x$ の点 0 の近くでの 1 次近似を求めよ．$\sin 0.1$, $\sin 0.01$ の近似値はどうなるか？

3 オイラー法

微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \tag{9}$$

$$(\text{丁寧に書くと}, \frac{d}{dx}y(x)=f(x,y(x)), \quad y(x_0)=y_0)$$

を考える (いちばん初めの式 (1) と同じ).

記号. h を 0.1, 0.01, 0.000001 などの 0 に近い数とし, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, $\ldots, x_i=x_0+ih, \ldots$ とおく．初期条件 $y(x_0)=y_0$ の記号に倣って, $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$, $\ldots, y(x_i)=y_i, \ldots$ とおく．これらは, 点 $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots$ における関数 y の真の値である．それに対して, 数値解法による近似値を $Y_1,Y_2,\ldots,Y_i,\ldots$ と大文字で表す．便宜上, $Y_0=y_0$ と定める．

3.1 前進差分による解法

関数 $y(x)$ の点 x_0 の近くでの 1 次近似 (6) を再掲すると

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h$$

である．今，与えられた微分方程式 (9) より $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$ なので，

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + f(x_0, y(x_0))h \tag{10}$$

を得る．上記の記号を使えば，

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{11}$$

となる．これは y_1 の近似値 Y_1 が

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_1 = Y_0 + hf(x_0, Y_0) \tag{12}$$

によって求まることを意味する．そこで，一般に

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i) \quad (i \geq 0) \tag{13}$$

とおけば (漸化式)，これを用いて逐次 $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ を求めていくことができる．このような数値解法を**前進差分を用いたオイラー法**といい，式 (13) を**オイラー法における前進差分スキーム**という．

例題 3-1. 次の初期値問題について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3 \tag{14}$$

(a) オイラー法における前進差分スキームを求めよ．ただし，差分を h とする．
(b) オイラー法における前進差分スキームを求めよ．ただし，差分を $h = 0.1$ とする．
(c) (b) の結果を用いて Y_1, Y_2, Y_3 を計算せよ (電卓可)．
(d) 復習．この微分方程式は以前の学習内容を思い出せば解くことができる．一般解と特殊解を求めよ．

【(a) の解】式 (13) より，オイラー法における前進差分スキームは以下のようになる:

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = Y_i + h(2x_iY_i) = (1+2hx_i)Y_i \quad (i \geq 0).$$

【(b) の解】上の式に $h = 0.1$ を代入すれば良い:

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = (1+0.2x_i)Y_i \quad (i \geq 0).$$

【(c) の解】$x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $\ldots$ に注意.

$$\begin{aligned}
Y_1 &= (1+0.2x_0)Y_0 = (1+0.2\times 0)\times 3 = 3, \\
Y_2 &= (1+0.2x_1)Y_1 = (1+0.2\times 0.1)\times 3, = 1.02\times 3 = 3.06 \\
Y_3 &= (1+0.2x_2)Y_2 = (1+0.2\times 0.2)\times 3.06 = 1.04\times 3.06 = 3.1824
\end{aligned}$$

よって，$Y_1 = 3$, $Y_2 = 3.06$, $Y_3 = 3.1824$ となる．

【(d) の解】$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 2x$ とし，両辺を x で積分すればよい (変数分離形).

$$\begin{aligned}
\log|y| &= x^2 + C \\
y &= Ae^{x^2} \text{ (一般解)} \\
y &= 3e^{x^2} \text{ (特殊解)}
\end{aligned}$$

3.2 中心差分による解法

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_{i-1} + 2hf(x_i, Y_i) \quad (i \geq 1) \tag{15}$$

とおき, Y_0 と Y_1 から Y_2 を求め, Y_1 と Y_2 から Y_3 を求め, という風に逐次求めていく. このような数値解法を**中心差分を用いたオイラー法**といい, 式 (15) を**オイラー法における中心差分スキーム**という. ただし, Y_1 は前進差分 (12) などにより求めておく.

3.3 後退差分による解法

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i-1} = Y_i - hf(x_i, Y_i) \quad (i \leq 0) \tag{16}$$

とおき, これを用いて逐次 $Y_{-1}, Y_{-2}, Y_{-3}, \ldots$ を求めていく. このような数値解法を**後退差分を用いたオイラー法**といい, 式 (16) を**オイラー法における後退差分スキーム**という.

例題 3-2. 次の初期値問題について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3 \tag{17}$$

(e) オイラー法における中心差分スキームを求めよ. ただし, 差分を h とし, Y_1 は前進差分で求めるものとする.
(f) オイラー法における後退差分スキームを求めよ. ただし, 差分を h とする.

【(e) の解】式 (15) より

$$Y_0 = 3, \qquad Y_1 = Y_0 + h(2x_0Y_0), \qquad Y_{i+1} = Y_{i-1} + 2h(2x_iY_i) \quad (i \geq 1)$$

Y_1 はもっと具体的に書ける. Y_{i+1} はもう少し整理できる.

$$\begin{aligned} Y_0 &= 3, \qquad Y_1 = 3 + h(2 \cdot 0 \cdot 3), \qquad Y_{i+1} = Y_{i-1} + 4hx_iY_i \quad (i \geq 1) \\ \therefore Y_0 &= 3, \qquad Y_1 = 3, \qquad Y_{i+1} = Y_{i-1} + 4hx_iY_i \quad (i \geq 1). \end{aligned}$$

【(f) の解】式 (16) より

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i-1} = Y_i - h(2x_iY_i) = (1 - 2hx_i)Y_i \quad (i \leq 0).$$

4　予備知識 (2)

4.1　テイラー展開と近似値

関数 $y = y(x)$ は点 x_0 の近くで何回でも微分可能とする．このとき, ある条件 (*) の下で, 点 x_0 の近くの点 $x_0 + h$ における関数値は

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \cdots \tag{18}$$

と表される．これを $y(x)$ の**点 x_0 におけるテイラー展開**という．((*)「テイラーの定理における剰余項が 0 に収束する」という条件.)

関数 $y(x)$ の点 x_0 における関数値と高次微分係数が分かれば, 式 (18) の右辺の級数の部分和を求めることで, 点 x_0 の近くにおける関数値を近似的に求めることができる．h^n の項まで用いる近似

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \tag{19}$$

を関数 $y(x)$ の点 x_0 の近くでの **n 次近似**という．

特に, $x_0 = 0$ の場合, 点 0 でのテイラー展開

$$y(h) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}h + \frac{y''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}h^n + \cdots \tag{20}$$

は**マクローリン展開**とも呼ばれ, 点 0 の近くでの n 次近似は以下の式で与えられる:

$$y(h) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}h + \frac{y''(0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}h^n. \tag{21}$$

例． 指数関数 $y(x) = e^x$ のマクローリン展開を求めよう．まず, $y(0) = e^0 = 1$．また, 高次導関数はすべて $y^{(k)}(x) = e^x$ $(k \geq 1)$ だから, $y^{(k)}(0) = e^0 = 1$．よって, (20) より

$$e^h = 1 + \frac{1}{1!}h + \frac{1}{2!}h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n + \cdots \tag{22}$$

となり, n 次近似は

$$e^h \approx 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n \tag{23}$$

となる．例えば, 2 次近似と 3 次近似を用いたときの $e^{0.1}$ の値は, それぞれ

$$\begin{aligned} e^{0.1} &\approx 1 + 0.1 + \frac{1}{2!} \times (0.1)^2 = 1.105, \\ e^{0.1} &\approx 1 + 0.1 + \frac{1}{2!} \times (0.1)^2 + \frac{1}{3!} \times (0.1)^3 = 1.105166666\ldots \end{aligned}$$

となる．

練習 4-1．$y(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求め, 3 次近似と 5 次近似を用いたときの $\sin 0.1$ の値をそれぞれ求めよ．

4.2　偏微分, 偏導関数

2 変数関数 $z = f(x, y)$ について, z が変数 x あるいは変数 y について微分可能のとき, 各々の導関数を

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} \tag{24}$$

と表し, 偏導関数と称した. 例えば, $f(x, y) = x^2y + y^3$ のとき, $f_x(x, y) = 2xy$, $f_y(x, y) = x^2 + 3y^2$.

4.3 合成関数の微分法

$z = f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ のとき, 合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ は t を変数とする 1 変数関数である．その導関数は

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= f_x(\phi(t), \psi(t)) \cdot \phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t) \end{aligned} \tag{25}$$

となる．これを利用すると $z = f(x, y(x))$ を x で微分することができ,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

例題. $z = f(x,y) = x^3 + y^2$, $y = y(x) = \sin x$ のとき, 合成関数 $z = f(x, y(x))$ を x で微分せよ.

解 1 (公式 (26) を利用). $f_x = 3x^2$, $f_y = 2y$ なので

$$\frac{dz}{dx} = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 3x^2 + 2y \cdot (\sin x)' = 3x^2 + 2 \sin x \cos x$$

解 2 (代入してから普通に微分). $z = f(x, y(x)) = x^3 + (\sin x)^2$ なので,

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 3x^2 + 2 \sin x \cos x.$$

練習 4-2. 公式 (25) を用いて $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．$z = xy^2 - x^2 y$. ただし, $x = t^2$, $y = e^t$.

練習 4-3. 公式 (26) を用いて $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ．$z = \arctan(xy)$. ただし, $y = e^{2x}$.

5 2 次のテイラー展開法

微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{27}$$

$$\left(\text{丁寧に書くと,} \ \frac{d}{dx} y(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0\right)$$

を考える (いちばん初めの式 (1) と同じ).

記号. h を 0.1, 0.01, 0.000001 などの 0 に近い数とし, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\ldots, x_i = x_0 + ih, \ldots$ とおく．初期条件 $y(x_0) = y_0$ の記号に倣って, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $\ldots, y(x_i) = y_i, \ldots$ とおく．これらは, 点 $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ における関数 y の真の値である．それに対して, 数値解法による近似値を $Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, \ldots$ と大文字で表す．便宜上, $Y_0 = y_0$ と定める．

5.1 2 次のテイラー展開法

まず, 関数 $y(x)$ の第 2 次導関数を調べておく．式 (27) と合成関数の微分法 (26) より,

$$\begin{aligned} y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} f(x, y(x)) \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) \end{aligned} \tag{28}$$

となる.

さて, $y=y(x)$ を点 x_0 のまわりでテイラー展開し, 式 (27) と (28) を用いると

$$\begin{aligned} y(x_0+h) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots \\ &= y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + \frac{h^2}{2}\{f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0)) \cdot f(x_0, y(x_0))\} + \cdots \end{aligned} \tag{29}$$

となるので, 上記の記号を使って表せば

$$y_1 = y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\{f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0)\} + \cdots \tag{30}$$

となる. 右辺の 3 次以降を打ち切り 2 次の項までの和を取れば, y_1 の近似値 Y_1 を得る. すなわち,

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_1 = Y_0 + hf(x_0, Y_0) + \frac{h^2}{2}\{f_x(x_0, Y_0) + f_y(x_0, Y_0) \cdot f(x_0, Y_0)\} \tag{31}$$

によって Y_1 が求まる. そこで, 一般に

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i) + \frac{h^2}{2}\{f_x(x_i, Y_i) + f_y(x_i, Y_i) \cdot f(x_i, Y_i)\} \quad (i \geq 0) \tag{32}$$

とおけば (漸化式), これを用いて逐次 $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ を求めていくことができる. この数値解法を **2 次のテイラー展開法**という.

例題 5-1. 次の初期値問題について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3 \tag{33}$$

(a) 2 次テイラー展開法のスキームを求めよ. ただし, 差分を h とする.
(b) 2 次テイラー展開法のスキームを求めよ. ただし, 差分を $h = 0.1$ とする.
(c) (b) の結果を用いて Y_1, Y_2 を計算せよ (電卓可).

【解】(a) $f(x,y) = 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = Y_0 = 3$.
$f(x,y) = 2xy$ より $f(x_i, Y_i) = 2x_iY_i$.
$f(x,y) = 2xy$ より $f_x(x,y) = 2y$ なので $f_x(x_i, Y_i) = 2Y_i$.
$f(x,y) = 2xy$ より $f_y(x,y) = 2x$ なので $f_y(x_i, Y_i) = 2x_i$.
これらを式 (32) に代入すると

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + h \cdot 2x_iY_i + \frac{h^2}{2}\{2Y_i + 2x_i \cdot 2x_iY_i\} \\ &= Y_i + 2hx_iY_i + h^2Y_i + 2h^2x_i^2Y_i \\ &= (1 + 2hx_i + h^2 + 2h^2x_i^2)Y_i \end{aligned}$$

となるので, 2 次テイラー展開法のスキームは以下のようになる.

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = (1 + 2hx_i + h^2 + 2h^2x_i^2)Y_i \quad (i \geq 0)$$

(b) $h = 0.1$ とすると

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = (1.01 + 0.2x_i + 0.02x_i^2)Y_i \quad (i \geq 0)$$

(c) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$ 等より

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= 3 \\
Y_1 &= (1.01 + 0.2x_0 + 0.02x_0^2)Y_0 \\
&= (1.01 + 0.2 \times 0 + 0.02 \times 0^2) \times 3 \\
&= 1.01 \times 3 \\
&= 3.03 \\
Y_2 &= (1.01 + 0.2x_1 + 0.02x_1^2)Y_1 \\
&= (1.01 + 0.2 \times 0.1 + 0.02 \times 0.1^2) \times 3.03 \\
&= 1.0302 \times 3.03 \\
&= 3.121506
\end{aligned}
$$

6 予備知識 (3)

6.1 2 変数関数の展開 (全微分可能性, 1 次までのテイラー展開)

2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (x_0, y_0) で偏微分可能で, かつ偏導関数が連続ならば, ある関数 $r(h,k)$ が存在して次のように表せる.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \{hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0)\} + r(h,k), \tag{34}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{35}$$

これを, $f(x,y)$ の点 (x_0,y_0) **における 1 次までのテイラー展開**という.

例えば, $f(x,y) = e^{x+y}$ の点 $(0,0)$ における 1 次までのテイラー展開 (1 次までのマクローリン展開) は

$$e^{h+k} = 1 + h + k + r(h,k) \tag{36}$$

となる.

また, 式 (34) で特に $k = bh$ とすれば

$$f(x_0+h, y_0+bh) = f(x_0,y_0) + \{hf_x(x_0,y_0) + bhf_y(x_0,y_0)\} + r(h,bh) \tag{37}$$

となる.

練習 6-1. 式 (36) を導出せよ.

7 ルンゲ・クッタ法

微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{38}$$

$$\left(丁寧に書くと, \ \frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0\right)$$

を考える (いちばん初めの式 (1) と同じ).

記号. h を 0.1, 0.01, 0.000001 などの 0 に近い数とし, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\ldots, x_i = x_0 + ih, \ldots$ とおく. 初期条件 $y(x_0) = y_0$ の記号に倣って, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $\ldots, y(x_i) = y_i, \ldots$ とおく. これらは, 点 $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ における関数 y の真の値である. それに対して, 数値解法による近似値を $Y_1, Y_2, \ldots, Y_i, \ldots$ と大文字で表す. 便宜上, $Y_0 = y_0$ と定める.

7.1　2 次のルンゲ・クッタ法

$y = y(x)$ を点 x_0 のまわりでテイラー展開する:

$$
\begin{aligned}
y(x_0+h) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots \\
&= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \cdots
\end{aligned}
$$

($h = \frac{h}{2} + \frac{h}{2}$ として, 第 2 項目を分解)

$$
= y(x_0) + \frac{h}{2}y'(x_0) + \frac{h}{2}y'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0) + \cdots \tag{39}
$$

(第 3 項と第 4 項をまとめる)

$$
= y(x_0) + \frac{h}{2}y'(x_0) + \frac{h}{2}\Big[y'(x_0) + hy''(x_0)\Big] + \cdots \tag{40}
$$

(式 (38) と (28) を用いて y' と y'' を f で表す. **(キーポイント 1)**)

$$
= y(x_0) + \frac{h}{2}f(x_0, y(x_0)) + \frac{h}{2}\Big[f(x_0, y(x_0)) + h\big\{f_x(x_0, y(x_0)) + f_y(x_0, y(x_0)) \cdot f(x_0, y(x_0))\big\}\Big] + \cdots \tag{41}
$$

(煩雑になったので, $y(x_0)$ は y_0 で表す. また, $f(x_0, y_0) = b$ とおく.)

$$
= y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0) + \frac{h}{2}\Big[f(x_0, y_0) + \big\{hf_x(x_0, y_0) + bhf_y(x_0, y_0)\big\}\Big] + \cdots \tag{42}
$$

(式 (37) より, 大カッコの中は $f(x_0+h, y_0+bh) - r(h, bh)$ である. **(キーポイント 2)**)

$$
= y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0) + \frac{h}{2}\Big[f(x_0+h, y_0+bh) - r(h, bh)\Big] + \cdots \tag{43}
$$

$$
= y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0) + \frac{h}{2}f(x_0+h, y_0+bh) + \cdots \tag{44}
$$

よって,

$$
y_1 = y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0) + \frac{h}{2}f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0)) + \cdots \tag{45}
$$

右辺の「$\cdots$」以降を打ち切れば y_1 の近似値 Y_1 が求まる. すなわち,

$$
Y_0 = y_0, \qquad Y_1 = Y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, Y_0) + \frac{h}{2}f(x_1, Y_0 + hf(x_0, Y_0)) \tag{46}
$$

によって Y_1 が求まる. そこで, 一般に

$$
Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}f(x_i, Y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, Y_i + hf(x_i, Y_i)) \quad (i \geq 0) \tag{47}
$$

とおけば (漸化式), これを用いて逐次 $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ を求めていくことができる. この数値解法を **2 次のルンゲ・クッタ法**という.

補注. 式 (47) を直接用いるには慣れが必要である. そこで, $Z_i = Y_i + hf(x_i, Y_i)$ とおき,

$$
Y_0 = y_0, \qquad Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2}f(x_i, Y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, Z_i) \quad (i \geq 0) \tag{48}
$$

とすれば少しは扱いやすい.

例題 7-1. 次の初期値問題について, 以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3 \tag{49}$$

(a) 2 次のルンゲ・クッタ法のスキームを求めよ. ただし, 差分を h とする.

(b) 2 次のルンゲ・クッタ法のスキームを求めよ. ただし, 差分を $h = 0.1$ とする.

(c) (b) の結果を用いて Y_1, Y_2 を計算せよ (電卓可).

【解】(a) $f(x,y) = 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = Y_0 = 3$.
$f(x,y) = 2xy$ より $f(x_i, Y_i) = 2x_iY_i$ なので,
$Z_i = Y_i + hf(x_i, Y_i) = Y_i + h \cdot 2x_iY_i = Y_i + 2hx_iY_i$.
よって, $f(x_{i+1}, Z_i) = 2x_{i+1}Z_i = 2x_{i+1}(Y_i + 2hx_iY_i)$.
これらを式 (48) に代入すると

$$\begin{aligned}
Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{2} \cdot 2x_iY_i + \frac{h}{2} \cdot 2x_{i+1}(Y_i + 2hx_iY_i) \\
&= Y_i + hx_iY_i + hx_{i+1}(Y_i + 2hx_iY_i) \\
&= Y_i + hx_iY_i + hx_{i+1}Y_i + 2h^2x_ix_{i+1}Y_i \\
&= (1 + hx_i + hx_{i+1} + 2h^2x_ix_{i+1})Y_i
\end{aligned}$$

となるので, 2 次のルンゲ・クッタ法のスキームは以下のようになる.

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = (1 + hx_i + hx_{i+1} + 2h^2x_ix_{i+1})Y_i \quad (i \geq 0)$$

(b) $h = 0.1$ とすると

$$Y_0 = 3, \qquad Y_{i+1} = (1 + 0.1x_i + 0.1x_{i+1} + 0.02x_ix_{i+1})Y_i \quad (i \geq 0)$$

(c) $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$ 等より

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 3 \\
Y_1 &= (1 + 0.1x_0 + 0.1x_1 + 0.02x_0x_1)Y_0 \\
&= (1 + 0.1 \times 0 + 0.1 \times 0.1 + 0.02 \times 0 \times 0.1) \times 3 \\
&= 1.01 \times 3 \\
&= 3.03 \\
Y_2 &= (1 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_1x_2)Y_1 \\
&= (1 + 0.1 \times 0.1 + 0.1 \times 0.2 + 0.02 \times 0.1 \times 0.2) \times 3.03 \\
&= 1.0304 \times 3.03 \\
&= 3.122112
\end{aligned}$$