微分方程式　「2 階の定数係数非同次線形微分方程式」(担当：谷戸)

2 階の定数係数非同次線形微分方程式

次の形の微分方程式のこと：

$$y'' + by' + cy = r(x) \tag{1}$$

ただし, b と c は定数で, $r(x) \neq 0$ とする．この形の微分方程式の解法について述べていく.

一般解を求めるための手順

Step 1.
式 (1) に対応する同次方程式

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

の一般解を求める.

Step 2.
式 (1) の特殊解をひとつ見つける.

Step 3.
Step 1 と Step 2 で求めたものの和が (1) の一般解となる.

Step 1 について

式 (2) の一般解は, 特性方程式

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3}$$

の解の状況によって, 以下の 3 通りに分かれる：

(I) 異なるふたつの実数解 λ_1, λ_2 を持つとき,

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(II) 実重解 λ を持つとき,

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}.$$

(III) 共役複素数解 $p \pm qi$ を持つとき,

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{px} \cos qx + c_2 e^{px} \sin qx \\ &= e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx). \end{aligned}$$

(c_1, c_2 は任意定数)

Step 2 について

式 (1) の右辺 $r(x)$ が, 多項式, 指数関数, 正弦関数, 余弦関数などのときは, **未定係数法 (係数比較)** と呼ばれる方法で (1) の特殊解を見つけることができる. これらの関数は, その導関数が元の関数と似ているという特徴があり, これが未定係数法を使うためのキーポイントである.

まず, 特殊解 $u = u(x)$ を, $r(x)$ の形に応じて以下の表のように選ぶ. 選択する各関数には未定係数が含まれている. u は式 (1) の解なので, u' や u'' を求めて (1) の左辺に代入し, 右辺 $r(x)$ との係数比較によって未定係数を決定する. 具体的なやり方は授業にて解説する.

＜基本規則＞

$r(x)$	特殊解 u の選択	(☆)
n 次多項式	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_0, a_1, \cdots, a_n$ が未定係数)	0
ke^{mx}	Ke^{mx} (K が未定係数)	m
$k\cos nx$ $k\sin nx$	$A\cos nx + B\sin nx$ (A, B が未定係数)	ni
$ke^{mx}\cos nx$ $ke^{mx}\sin nx$	$e^{mx}(A\cos nx + B\sin nx)$ (A, B が未定係数)	$m + ni$

＜修正規則＞
上の表の (☆) の数が特性方程式 (3) の**単解**になっているときは, **x を掛けたもの**を特殊解として選択する.

上の表の (☆) の数が特性方程式 (3) の**重解**になっているときは, **x^2 を掛けたもの**を特殊解として選択する.

＜和の規則＞
$r(x)$ がいくつかの関数の和ならば, 対応するものの和を特殊解として選択する.