■基礎数学 1　演習 No.6　総合問題　(担当: 谷戸)

6.1. 以下の関数を微分しなさい.

(1) $y = 7x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 5x + 1$

(2) $y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2}$

(3) $y = \sin(4x + 3)$

(4) $y = e^{x^3}$ (注. $e^{(x^3)}$ の意味)

(5) $y = \log(\cos x)$

(6) $y = \tan(2x - 1)$

(7) $y = \sin x \cdot \cos x$

(8) $y = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$

(9) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

(10) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

6.2. $y = e^{ax} \sin bx$ が $y'' - 2y' + 2y = 0$ を満たすように, 定数 a, b の値を定めよ. ただし, $b \neq 0$ とする.

補足. 関数 $y = f(x)$ の導関数を y' と書くが, これをもう一度微分したものを**第 2 次導関数**といい, y'' で表す. すなわち, $y'' = (y')'$.

6.3. 以下の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x^{10} + x^{-10})\, dx$

(2) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}\, dx$

(3) $\displaystyle\int \sin(6x + 3)\, dx$

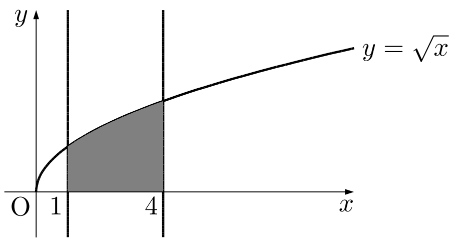
(4) $\displaystyle\int e^{3x+1}\, dx$

(5) $\displaystyle\int x^2 \cos(x^3 + 1)\, dx$

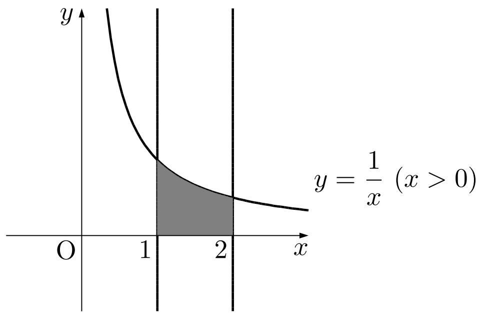
(6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 - e^x}\, dx$

6.4. 陰影部の符号付き面積 (定積分) を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$



(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$



学科　　　番号　　　氏名

ヒントと略解.

6.1. (1) $y' = 21x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

(2) $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

(3) 合成関数の微分. $y' = 4\cos(4x+3)$

(4) 合成関数の微分. $y' = 3x^2 e^{x^3}$

(5) 合成関数の微分. $y' = -\tan x$

(6) 合成関数の微分. $y' = \dfrac{2}{\cos^2(2x-1)}$

(7) 積の微分. $y' = \cos^2 x - \sin^2 x \, (= \cos 2x)$

(8) 積の微分. $y' = \dfrac{1+4x}{2\sqrt{x}} e^{2x}$

(9) 商の微分. $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(10) 商の微分. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

6.2. 積の微分を使って導関数を求めると $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$. これを微分して第 2 次導関数 y'' を求めよ. さらに, $y'' - 2y' + 2y = 0$ に代入して式を整理し, $e^{ax}\sin bx$ と $e^{bx}\cos bx$ の係数を調べよ.
$a = 1$, $b = \pm 1$.

6.3. (1) $\dfrac{1}{11}x^{11} - \dfrac{1}{9}x^{-9} + C$

(2) $\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$

(3) 置換積分. $u = 6x+3$ とおけ. $-\dfrac{1}{6}\cos(6x+3) + C$

(4) 置換積分. $u = 3x+1$ とおけ. $\dfrac{1}{3}e^{3x+1} + C$

(5) 置換積分. $u = x^3+1$ とおけ. $\dfrac{1}{3}\sin(x^3+1) + C$

(6) 置換積分. $u = 1 - e^x$ とおけ. $-\log|1-e^x| + C$

6.4. (1) $\dfrac{14}{3}$

(2) $\log 2$

6.2 の解答.

$y = e^{ax}\sin bx$ の導関数を求めると

$$\begin{aligned} y' &= (e^{ax})'\sin bx + e^{ax}(\sin bx)' \\ &= ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{aligned}$$

第 2 次導関数 y'' を求めると

$$\begin{aligned} y'' &= (ae^{ax}\sin bx)' + (be^{ax}\cos bx)' \\ &= (ae^{ax})'\sin bx + ae^{ax}(\sin bx)' + (be^{ax})'\cos bx + be^{ax}(\cos bx)' \\ &= a^2e^{ax}\sin bx + abe^{ax}\cos bx + abe^{ax}\cos bx - b^2e^{ax}\sin bx \\ &= (a^2-b^2)e^{ax}\sin bx + (2ab)e^{ax}\cos bx \end{aligned}$$

そこで $y'' - 2y' + 2y$ を求めると

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= (a^2-b^2)e^{ax}\sin bx + (2ab)e^{ax}\cos bx - 2(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) + 2(e^{ax}\sin bx) \\ &= (a^2-b^2-2a+2)e^{ax}\sin bx + (2ab-2b)e^{ax}\cos bx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1) \end{aligned}$$

仮定より, 関数 $y'' - 2y' + 2y$ は定数関数 0 であるから,

$$\begin{aligned} &a^2 - b^2 - 2a + 2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2) \\ &2ab - 2b = 2b(a-1) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (3) \end{aligned}$$

を得る. (注: これらは「式 (1)$=0$」に $x = \frac{\pi}{2b}, 0$ を代入すれば得られる. $e^{ax} > 0$ にも注意.)

$b \neq 0$ なので (3) より $a - 1 = 0$. よって, $a = 1$.

これを (2) に代入すると, $1 - b^2 = 0$. よって, $b = \pm 1$.

(答) $a = 1$, $b = \pm 1$.