資料: 微分公式とその証明

定義 1 (**導関数の定義**)**.** 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

導関数 $f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を**微分する**という.

1　いくつかの簡単な関数の導関数

導関数の定義の練習を兼ね, いくつかの簡単な関数の導関数を紹介する.

公式 2 (**定数関数の導関数**)**.** 任意の定数 c に対して, 関数 $f(x) = c$ の導関数は $f'(x) = 0$ である. すなわち,

$$(c)' = 0 \qquad (c \text{ は定数}) \tag{2}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

となる. □

公式 3 (x **の導関数**)**.** 関数 $f(x) = x$ の導関数は $f'(x) = 1$ である. すなわち,

$$(x)' = 1 \tag{3}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

となる. □

公式 4 (x^2 **の導関数**)**.** 関数 $f(x) = x^2$ の導関数は $f'(x) = 2x$ である. すなわち,

$$(x^2)' = 2x \tag{4}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

となる. □

公式 5 (x^3 **の導関数**)**.** 関数 $f(x) = x^3$ の導関数は $f'(x) = 3x^2$ である. すなわち,

$$(x^3)' = 3x^2 \tag{5}$$

が成り立つ.

証明. $(x^2)' = 2x$ の証明と同様の方法で示せるので省略. □

Remark. ここでは x, x^2, x^3 の導関数を紹介したが, より一般に x^n の導関数が知られている (後述).

2 一般的な微分公式

ここでは, 関数の定数倍ならびにふたつの関数の四則演算について成り立つ微分公式を紹介する.

定理 6 (**定数倍の微分**)**.** 関数 $f(x)$ に導関数 $f'(x)$ が存在するとき, $\phi(x) = cf(x)$ (c は任意の定数) にも導関数が存在して, $\phi'(x) = cf'(x)$ となる. すなわち,

$$\{cf(x)\}' = cf'(x) \tag{6}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x)\end{aligned}$$

となる. □

定理 7 (**和の微分**)**.** 関数 $f(x), g(x)$ に導関数 $f'(x), g'(x)$ が存在するとき, $\phi(x) = f(x) + g(x)$ にも導関数が存在して, $\phi'(x) = f'(x) + g'(x)$ となる. すなわち,

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x) \tag{7}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

となる. □

定理 8 (**差の微分**)**.** 関数 $f(x), g(x)$ に導関数 $f'(x), g'(x)$ が存在するとき, $\phi(x) = f(x) - g(x)$ にも導関数が存在して, $\phi'(x) = f'(x) - g'(x)$ となる. すなわち,

$$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x) \tag{8}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. 和の微分と同様の方法で示せるので, 詳細は省略する. □

定理 9 (積の微分)**.** 関数 $f(x), g(x)$ に導関数 $f'(x), g'(x)$ が存在するとき, $\phi(x) = f(x)g(x)$ にも導関数が存在して, $\phi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ となる. すなわち,

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{9}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

となる. □

定理 10 (商の微分)**.** 関数 $f(x), g(x)$ に導関数 $f'(x), g'(x)$ が存在するとき, $\phi(x) = f(x)/g(x)$ にも導関数が存在して, $\phi'(x) = \{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\}/\{g(x)\}^2$ となる. すなわち,

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \tag{10}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \left\{ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x) - \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= \frac{1}{g(x)g(x)} \cdot \{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

となる. □

Remark (商の微分の特別な場合). 任意の定数関数の導関数は 0 であるから, もし $f(x) = 1$ なら $f'(x) = 0$ である. 商の微分の公式に $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$ を代入することで

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \tag{11}$$

が成り立つ.

3 多項式・有理式の導関数

公式 11 (x^n **の導関数 (1)**)**.** 任意の正の整数 n に対して, 関数 $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ となる. すなわち,

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{12}$$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法で示す.

(i) $(x^1)' = (x)' = 1$ ならびに $1x^{1-1} = x^0 = 1$ より, $n = 1$ のときは成り立つ. (注意. $(x)' = 1$ であることは既に導関数の定義に基づいて求算済み.)

(ii) $n = k$ のときに成り立つと仮定する: $(x^k)' = kx^{k-1}$. このとき, $x^{k+1} = x^k \cdot x$ に注意して x^{k+1} を微分すると,

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' \qquad [\text{積の微分より}] \\
&= kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 \qquad [\text{帰納法の仮定より}] \\
&= kx^k + x^k \\
&= (k+1)x^k \\
&= (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

となる. よって, $n = k + 1$ のときも成り立つ.

したがって, (i),(ii) より, 任意の $n \geq 1$ に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ. □

公式 12 ($1/x^m$ **の導関数**)**.** 任意の正の整数 m に対して, 関数 $f(x) = 1/x^m$ の導関数は $f'(x) = -m/x^{m+1}$ となる. すなわち,

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m}{x^{m+1}} \tag{13}$$

が成り立つ.

証明.「商の微分の特別な場合」と「x^n の微分 (1)」より

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}}$$

となる. □

公式 13 (x^n **の導関数 (2)**)**.** 任意の整数 n に対して, 関数 $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ となる. すなわち,

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{14}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. $n \geq 1$ のときは「x^n の導関数 (1)」そのものであるから正しい. $n = 0$ のときは $(x^0)' = (1)' = 0$ を表しているので正しい. $n \leq 1$ のときは, $m = -n$ とおくことで「$1/x^m$ の微分」と同値になるので正しい. (補注. 「$1/x^m$ の微分」は $(x^{-m})' = -mx^{-(m+1)} = -mx^{-m-1}$ (m は正の整数) と表せるから, $-m$ を n に置き換えれば, $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n は負の整数) となる.) □

公式 14 (**多項式の導関数**)**.** n を非負整数とする. このとき, n 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ の導関数は $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ となる. すなわち,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \tag{15}$$

が成り立つ.

<u>証明</u>. 和の微分, 定数倍の微分, x^n の導関数より

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

となる. □

Remark (**有理式の導関数**). ふたつの多項式 $f(x), g(x)$ の商 $f(x)/g(x)$ を**有理式**または**有理関数**という. その導関数は商の微分と多項式の導関数を組み合わせることで求められる.

4 三角関数の導関数

15 (準備)**.** 極限に関する次の公式が成り立つ:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \tag{16}$$

その証明は省略する. この公式を用いると次の式が導ける:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0. \tag{17}$$

実際,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{-\sin h}{\cos h + 1} = 1 \cdot \frac{-\sin 0}{\cos 0 + 1} = 1 \cdot \frac{-0}{1+1} = 0\end{aligned}$$

となる.

公式 16 ($\sin x$ **の導関数**)**.** 正弦関数 $f(x) = \sin x$ の導関数は $f'(x) = \cos x$ となる. すなわち,

$$(\sin x)' = \cos x \tag{18}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義, 加法定理, および上の極限の公式より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= (\sin x)\cdot 0+(\cos x)\cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

となる. □

公式 17 ($\cos x$ **の導関数**)**.** 余弦関数 $f(x)=\cos x$ の導関数は $f'(x)=-\sin x$ となる. すなわち,

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{19}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義, 加法定理, および上の極限の公式より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right) \\ &= (\cos x)\cdot 0-(\sin x)\cdot 1 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

となる. □

公式 18 ($\tan x$ **の導関数**)**.** 正接関数 $f(x)=\tan x$ の導関数は $f'(x)=1/\cos^2 x$ となる. すなわち,

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{20}$$

が成り立つ.

証明. $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので, 商の微分より

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(\cos x)-(\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

となる. □

5 一般的な微分公式 その 2

定理 19 (**合成関数の微分**)**.** 関数 $f(x), g(x)$ に導関数 $f'(x), g'(x)$ が存在するとき, g と f の合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ にも導関数が存在して, $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ となる. すなわち,

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{21}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義より,

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

[ここで $k=g(x+h)-g(x)$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる. また, $t=g(x)$ とおくと $g(x+h)=g(x)+k=t+k$ と表せる.]

$$\begin{aligned}&= \lim_{k\to 0}\frac{f(t+k)-f(t)}{k}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(t)\cdot g'(x)\\ &= f'(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

となる. □

定理 20 (**逆関数の微分**)**.** 関数 $f(x)$ は逆関数 $\phi(x)=f^{-1}(x)$ を持つとする. 関数 $f(x)$ に導関数 $f'(x)$ が存在するとき, f の逆関数 $\phi(x)$ にも導関数が存在して, $\phi'(x)=1/f'(\phi(x))$ となる. すなわち,

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{22}$$

が成り立つ.

証明. 合成関数の微分より,

$$\{f(\phi(x))\}'=f'(\phi(x))\cdot\phi'(x)$$

である. 一方, 逆関数の定義から $f(\phi(x))=x$ なので, $\{f(\phi(x))\}'=(x)'=1$ である. よって, $f'(\phi(x))\cdot\phi'(x)=1$, すなわち

$$\phi'(x)=1/f'(\phi(x))$$

となる. □

6 指数関数・対数関数の導関数

公式 21 (e^x **の導関数**)**.** ネピアの数 e を底とする指数関数 $f(x)=e^x$ の導関数は $f'(x)=e^x$ となる. すなわち,

$$(e^x)'=e^x \tag{23}$$

が成り立つ.

証明. 導関数の定義, 指数法則より,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\\ &=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}=e^x\cdot f'(0)=e^x\cdot 1=e^x\end{aligned}$$

となる. (補注. ネピアの数の定義より, 曲線 $y=e^x$ の点 $(0,1)$ における接線の傾きは 1. すなわち, $f(x)$ の点 0 における微分係数は $f'(0)=1$.) □

公式 22 ($\log x$ **の導関数**)**.** ネピアの数 e を底とする対数関数 $f(x) = \log_e x = \log x$ の導関数は $f'(x) = 1/x$ となる．すなわち，

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \tag{24}$$

が成り立つ．

<u>証明</u>．$f(x) = \log x$ は $g(x) = e^x$ の逆関数である．すなわち $g^{-1}(x) = \log x$．よって，逆関数の微分より

$$f'(x) = \{g^{-1}(x)\}' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

となる． □

公式 23 ($\log_a x$ **の導関数**)**.** $a > 0$, $a \neq 1$ とする． a を底とする対数関数 $f(x) = \log_a x$ の導関数は $f'(x) = 1/(x \log a)$ となる．すなわち，

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \tag{25}$$

が成り立つ．

<u>証明</u>．底の変換公式より $\log_a x = \log_e x / \log_e a = \log x / \log a$ となることに注意すると，定数倍の微分，$\log x$ の導関数より

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\log a} \cdot \log x\right)' = \frac{1}{\log a} \cdot (\log x)' = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a}$$

となる． □

公式 24 (a^x **の導関数**)**.** $a > 0$, $a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数は $f'(x) = a^x \log a$ となる．すなわち，

$$(a^x)' = a^x \log a \tag{26}$$

が成り立つ．

<u>証明</u>．$f(x) = a^x$ は $g(x) = \log_a x$ の逆関数である．すなわち $g^{-1}(x) = a^x$．よって，逆関数の微分より

$$f'(x) = \{g^{-1}(x)\}' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{1/(a^x \log a)} = a^x \log a$$

となる． □